Zadania do omówienia na ćwiczeniach w poniedziałek 30.01.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Przypominam wzór Taylora w zerze z użyteczną dla wielu zadań postacią reszty:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+x^{n+1}\cdot g(x)\,,$$

gdzie g jest funkcją gładką, czyli C^∞, czyli mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu zera. Oczywiście musimy założyć, że funkcja f jest gładka w otoczeniu zera, ale to na ogół jest prawdą w przykładach, które spotykamy na swojej drodze.

Ogólna, nieco bardziej sformalizowana, wersja wzoru Taylora w tej postaci wygląda następująco:

Niech f będzie funkcją gładką w otoczeniu punktu x_0. Wówczas dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka funkcja g_n gładka w otoczeniu x_0, że dla każdego x odpowiednio bliskiego[1] x_0 zachodzi równość

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+(x-x_0)^{n+1}\cdot g_n(x)\,.$$

Do tego trzeba dodać następujące spostrzeżenia[2]:

Po pierwsze:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^n=n!$$

Po drugie, dla $k>n$:

$$\frac{d^k}{dx^k}x^n=0$$

I wreszcie po trzecie:

Wobec równości

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\cdot h(x)\right)=x^{n-1}\cdot\left(n\cdot h(x)+x\cdot h'(x)\right)$$

przez indukcję możemy udowodnić, że dla $k<n$ istnieje taka funkcja h_k, że

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^n\cdot h(x)\right)=x^{n-k}\cdot h_k(x)\,,$$

a to ma w zerze wartość zero. Stąd wniosek, że dla gładkiej funkcji h oraz $k<n$ zachodzi

$$\left.\frac{d^k}{dx^k}\left(x^n\cdot h(x)\right)\right|_{x=0}=0\,,$$

gdzie przez $\left.F(x)\right|_{x=a}$ rozumiemy $F(a)$.

[1]Sformułowanie "Dla każdego x odpowiednio bliskiego x_0 ..." można sformalizować jako: Istnieje takie $\delta>0$, że dla każdego $x\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$ ...

[2]Dla uproszczenia te spostrzeżenia są sformułowane dla $x_0=0$.

551. W zadaniach **551.1–551.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x)=x^k\cdot\ln(1+x)\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

551.1. $f_1''(0)=$ ....

551.2. $f_1'''(0)=$ ....

551.3. $f_1^{(4)}(0)=$ ....

551.4. $f_1^{(5)}(0)=$ ....

551.5. $f_2'''(0)=$ ....

551.6. $f_2^{(4)}(0)=$ ....

551.7. $f_2^{(5)}(0)=$ ....

551.8. $f_3^{(4)}(0)=$ ....

551.9. $f_3^{(5)}(0)=$ ....

551.10. $f_4^{(5)}(0)=$ ....

552. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^2\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0)=\ldots.$ **b)** $f^{(10)}(0)=\ldots.$ **c)** $f^{(9)}(0)=\ldots.$ **d)** $f^{(8)}(0)=\ldots.$

553. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^3\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0)=\ldots.$ **b)** $f^{(6)}(0)=\ldots.$ **c)** $f^{(10)}(0)=\ldots.$ **d)** $f^{(11)}(0)=\ldots.$

554. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^{100}\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0)=\ldots$ **b)** $f^{(101)}(0)=\ldots$ **c)** $f^{(102)}(0)=\ldots$ **d)** $f^{(103)}(0)=\ldots$

555. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\sin^2 x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0)=\ldots.$ **b)** $f^{(5)}(0)=\ldots.$ **c)** $f^{(6)}(0)=\ldots.$ **d)** $f^{(8)}(0)=\ldots.$

556. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\frac{x\cdot\ln(1+x)}{12!}\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0)=\ldots$ **b)** $f^{(12)}(0)=\ldots$ **c)** $f^{(13)}(0)=\ldots$ **d)** $f^{(14)}(0)=\ldots$

557. Niech $f(x)=e^{x^5}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.

558. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sin\left(x^3\right)+a\cdot\sin\left(x^5\right)$$

spełniała warunek

$$f^{(15)}(0)=0\,.$$

559. Przy okazji reguły de l'Hospitala rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.

560. Przy okazji reguły de l'Hospitala rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.