Zadania do omówienia na ćwiczeniach w środę 25.01.2023.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0.

537. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}, \ \ x_0=0$

538. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}, \ \ x_0=0$

539. $f(x)=\sin x-\ln(1+x), \ \ x_0=0$

540. $f(x)=2\cos x+\ln\left(1+x^2\right), \ \ x_0=0$

541. $f(x)=\mathrm{arctg} x-x, \ \ x_0=0$

542. $f(x)=\mathrm{arctg} x-\frac{x}{2}, \ \ x_0=1$

543. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f=[a,b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(i) $f'(a^+)>0$

(ii) $f'(a^+)<0$

(iii) $f'(a^+)=0, \ \ f''(a^+)>0$

(iv) $f'(a^+)=0, \ \ f''(a^+)<0$

(v) $f'(a^+)=f''(a^+)=0, \ \ f'''(a^+)>0$

(vi) $f'(a^+)=f''(a^+)=0, \ \ f'''(a^+)<0$

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(vii) $f'(b^-)>0$

(viii) $f'(b^-)<0$

(ix) $f'(b^-)=0, \ \ f''(b^-)>0$

(x) $f'(b^-)=0, \ \ f''(b^-)<0$

(xi) $f'(b^-)=f''(b^-)=0, \ \ f'''(b^-)>0$

(xii) $f'(b^-)=f''(b^-)=0, \ \ f'''(b^-)<0$

544. Dobrać takie liczby rzeczywiste a, b, c, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{1+x}+ax+bx^2+cx^3$$

spełniała warunek

$$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0\,.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

545. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\ln(1+x)+e^{-x}+ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0)=0\,.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

546. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\ln(1+x)+a\cdot e^x$$

miała w zerze (lokalne) ekstremum. Jakie to ekstremum?

547. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapragniemy, a ponadto

$$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0\,.$$

Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x)=f\left(x^2\right)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0)=0 \qquad \text{dla} \qquad k=1,2,\ldots,n\,,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0)=0$.

548. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapragniemy, a ponadto

$$f'(0)=f''(0)=0\,.$$

Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x)=f\left(x^3\right)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0)=0 \qquad \text{dla} \qquad k=1,2,\ldots,n\,,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0)=0$.

549. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapragniemy. Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x)=f\left(x^5\right)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0)=0 \qquad \text{dla} \qquad k=1,2,\ldots,n\,,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0)=0$.

550. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna tyle razy, ile sobie zapragniemy. Dowieść, że funkcja g określona wzorem $g(x)=x^5\cdot f(x)$ spełnia warunek

$$g^{(k)}(0)=0 \qquad \text{dla} \qquad k=1,2,\ldots,n\,,$$

gdzie n jest możliwie największe. Pokazać na przykładzie, że nie musi być $g^{(n+1)}(0)=0$.