Wstawić znak "$<$" albo "$>$" i udowodnić powstałą nierówność:

516. $e^x > 1+x$ dla $x>0$

517. $e^x < 1+2x$ dla $0<x<1$

518. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

519. $e^x < 1+x+x^2$ dla $0<x<1$

520. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

521. $\ln(x+1) < x$ dla $x>0$

522. $\ln(x+1) > x-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

523. $\ln(x+1) < x$ dla $-1<x<0$

524. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

525. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x>0$

526. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

527. $\ln(x+1) > \frac{x}{2}$ dla $0<x<2$

528. $\mathrm{arctg} x < x$ dla $x>0$

529. $\mathrm{arctg} x > \frac{\pi x}{4}$ dla $0<x<1$

530. $\sin x < x$ dla $x>0$

531. $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

532. $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

533. $\cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x>0$

534. $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$

535. $\sin x > \frac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{6}$

536. Wyznaczyć liczbę naturalną k oraz liczby wymierne a i b, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej funkcji trzykrotnie różniczkowalnej $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o dodatniej pochodnej pierwszego rzędu, pochodna trzeciego rzędu funkcji f odwrotnej do g wyraża się wzorem:

$$f'''(g(x))=\frac{a\cdot(g''(x))^2+b\cdot g'(x)\cdot g'''(x)}{(g'(x))^k}\,.$$

Rozwiązanie:

Trzykrotne różniczkowanie stronami równości

$$f(g(x))=x$$

prowadzi kolejno do

$$f'(g(x))\cdot g'(x)=1\,,$$

$$f''(g(x))\cdot(g'(x))^2+f'(g(x))\cdot g''(x)=0\,,$$

$$f'''(g(x))\cdot(g'(x))^3+f''(g(x))\cdot 2\cdot g'(x)\cdot g''(x)+f''(g(x))\cdot g''(x)\cdot g'(x)+f'(g(x))\cdot g'''(x)=0\,,$$

$$f'''(g(x))\cdot(g'(x))^3+3\cdot f''(g(x))\cdot g'(x)\cdot g''(x)+f'(g(x))\cdot g'''(x)=0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy następujące wzory na pochodne funkcji f:

$$f'(g(x))=\frac{1}{g'(x)}\,,$$

$$f''(g(x))=-\frac{f'(g(x))\cdot g''(x)}{(g'(x))^2}=-\frac{g''(x)}{(g'(x))^3}\,,$$

$$f'''(g(x))=-\frac{3\cdot f''(g(x))\cdot g'(x)\cdot g''(x)+f'(g(x))\cdot g'''(x)}{(g'(x))^3}=$$

$$=-\frac{3\cdot\frac{-g''(x)}{(g'(x))^3}\cdot g'(x)\cdot g''(x)+\frac{1}{g'(x)}\cdot g'''(x)}{(g'(x))^3}=\frac{3\cdot(g''(x))^2-g'(x)\cdot g'''(x)}{(g'(x))^5}\,.$$

W konsekwencji szukane liczby to $k=5$, $a=3$ i $b=-1$.