**Kolokwium nr 6:** wtorek 24.01.2023, godz. 10:15-11:45, materiał zad. 1–536.

## Zadania do omówienia na ćwiczeniach w poniedziałek 23.01.2023.

**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!**

**513.** Uzupełnić znakami ”$<$” lub ”$>$”:
LEMAT: Niech $a$ będzie liczbą rzeczywistą i niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami różniczkowalnymi, że $f(a)=g(a)$.
Jeżeli dla każdego $x>a$ zachodzi nierówność $f'(x)<g'(x)$, to dla dowolnego $x>a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x<a$ zachodzi nierówność $f'(x)<g'(x)$, to dla dowolnego $x<a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

**514.** Uzupełnić znakami ”$<$” lub ”$>$”:
LEMAT: Niech $a$ będzie liczbą rzeczywistą i niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a)=g(a)$ oraz $f'(a)=g'(a)$.
Jeżeli dla każdego $x>a$ zachodzi nierówność $f''(x)<g''(x)$, to dla dowolnego $x>a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x<a$ zachodzi nierówność $f''(x)<g''(x)$, to dla dowolnego $x<a$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

**515.** Uzupełnić znakami ”$<$” lub ”$>$”:
LEMAT: Niech $a<b$ będą liczbami rzeczywistymi i niech $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będą takimi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi, że $f(a)=g(a)$ oraz $f(b)=g(b)$.
Jeżeli dla każdego $x\in(a,\,b)$ zachodzi nierówność $f''(x)<g''(x)$, to dla dowolnego $x\in(a,\,b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.
Jeżeli dla każdego $x\in(a,\,b)$ zachodzi nierówność $f''(x)>g''(x)$, to dla dowolnego $x\in(a,\,b)$ prawdziwa jest nierówność $f(x)$ ..... $g(x)$.

Wstawić znak ”$<$” albo ”$>$” i udowodnić powstałą nierówność:

**516.** $e^x$ .......... $1+x$ dla $x>0$

**517.** $e^x$ .......... $1+2x$ dla $0<x<1$

**518.** $e^x$ .......... $1+x+\dfrac{x^2}{2}$ dla $x>0$

**519.** $e^x$ .......... $1+x+x^2$ dla $0<x<1$

**520.** $e^x$ .......... $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ dla $x>0$

**521.** $\ln(x+1)$ .......... $x$ dla $x>0$

**522.** $\ln(x+1)$ .......... $x-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

**523.** $\ln(x+1)$ .......... $x$ dla $-1<x<0$

**524.** $\ln(x+1)$ .......... $x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

**525.** $\ln(x+1)$ .......... $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x>0$

**526.** $\ln(x+1)$ .......... $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

**527.** $\ln(x+1)$ .......... $\frac{x}{2}$ dla $0<x<2$

**528.** $\mathrm{arctg}x$ .......... $x$ dla $x>0$

**529.** $\mathrm{arctg}x$ .......... $\frac{\pi x}{4}$ dla $0<x<1$

**530.** $\sin x$ .......... $x$ dla $x>0$

**531.** $\cos x$ .......... $1-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

**532.** $\sin x$ .......... $x-\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

**533.** $\cos x$ .......... $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x>0$

**534.** $\sin x$ .......... $\frac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$

**535.** $\sin x$ .......... $\frac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{6}$

**536.** Wyznaczyć liczbę naturalną $k$ oraz liczby wymierne $a$ i $b$, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej funkcji trzykrotnie różniczkowalnej $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o dodatniej pochodnej pierwszego rzędu, pochodna trzeciego rzędu funkcji $f$ odwrotnej do $g$ wyraża się wzorem:

$$f'''(g(x))=\frac{a\cdot(g''(x))^2+b\cdot g'(x)\cdot g'''(x)}{(g'(x))^k}\,.$$