494. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\ln x-\sqrt{x}\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16)+f(18) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(17)\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)>0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>0\,,$$

$$\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>\frac{1}{x^2}\,,$$

$$\sqrt{x}>4\,,$$

$$x>16\,.$$

Zatem f jest ściśle wypukła w przedziale $[16;+\infty)$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

czyli

$$f(x)+f(y)>2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\geqslant 16$.

W szczególności

$$f(16)+f(18)>2\cdot f(17)\,.$$

495. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\ln x-\sqrt[3]{x}\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89)+f(91) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(90)\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3\cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}<0\,,$$

$$\frac{2}{9\cdot x^{5/3}}<\frac{1}{x^2}\,,$$

$$x^{1/3}<\frac{9}{2}\,,$$

$$x<\frac{9^3}{2^3}=\frac{729}{8}=91,125\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $(0;\,91,125)$, skąd

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y<91,125$.

W szczególności

$$f(89)+f(91)<2\cdot f(90)\,.$$

Uwaga: Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$f(89)+f(91)\approx \mathbf{0,036809}335389$$

oraz

$$2\cdot f(90)\approx \mathbf{0,036809}847546\,,$$

co wydaje się skutecznie odbierać wszelką nadzieję na rozwiązanie zadania poprzez bezpośrednie szacowanie każdej z podanych liczb z osobna.

496. Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61)+f(63)\qquad \text{czy}\qquad 2\cdot f(62)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x)>0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{2}{x^2}>0\,,$$

$$\frac{2}{x^2}>\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8 > \sqrt{x}\,,$$

$$x < 64\,,$$

co oznacza, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, 64)$ oraz $f''(x) > 0$ dla $x \in (64, \infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, 64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64, \infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0, 64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x = 61$ oraz $y = 63$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(61)+f(63) > 2\cdot f(62)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(61)+f(63)$ jest większa od liczby $2\cdot f(62)$.

497. Niech $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2\cdot \ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65)+f(67) \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(66)\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\,,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2}\,.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x) > 0$:

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2} > 0\,,$$

$$\frac{2}{x^2} > \frac{1}{4\cdot x^{3/2}}\,,$$

$$8 > \sqrt{x}\,,$$

$$x < 64\,,$$

co oznacza, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, 64)$ oraz $f''(x) > 0$ dla $x \in (64, \infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, 64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64, \infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64, \infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x=65$ oraz $y=67$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(65)+f(67)<2\cdot f(66)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(65)+f(67)$ jest mniejsza od liczby $2\cdot f(66)$.

498. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\operatorname{arctg}100+2\cdot\operatorname{arctg}103+3\cdot\operatorname{arctg}106 \qquad \text{czy} \qquad 6\cdot\operatorname{arctg}104\ ?$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x)=\operatorname{arctg}x$. Ponieważ jej pochodna $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ jest malejąca na przedziale $(0,+\infty)$, funkcja f jest na tym przedziale ściśle wklęsła.

Zatem na mocy nierówności Jensena dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2 i x_3 oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2 i a_3 spełniających warunek $a_1+a_2+a_3=1$ zachodzi

$$f\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)>a_1f\left(x_1\right)+a_2f\left(x_2\right)+a_3f\left(x_3\right)\,,$$

co dla $x_1=100$, $x_2=103$, $x_3=106$, $a_1=1/6$, $a_2=1/3$, $a_3=1/2$ prowadzi do nierówności

$$f(104)>\frac{f(100)}{6}+\frac{f(103)}{3}+\frac{f(106)}{2}\,,$$

gdyż wówczas

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\frac{100}{6}+\frac{103}{3}+\frac{106}{2}=\frac{100+2\cdot 103+3\cdot 106}{6}=\frac{624}{6}=104\,.$$

Mnożąc udowodnioną nierówność stronami przez 6 i podstawiając $f(x)=\operatorname{arctg}x$ otrzymujemy

$$6\cdot\operatorname{arctg}104>\operatorname{arctg}100+2\cdot\operatorname{arctg}103+3\cdot\operatorname{arctg}106\,.$$

Uwaga:

Bezpośrednie wyliczenia pokazują, że

$$\operatorname{arctg}100+2\cdot\operatorname{arctg}103+3\cdot\operatorname{arctg}106\approx\mathbf{9{,}3670}60$$

oraz

$$6\cdot\operatorname{arctg}104\approx\mathbf{9{,}3670}87\,.$$

Różnica między porównywanymi liczbami jest więc zbyt mała, aby można sobie wyobrazić ich porównanie bez użycia komputera przez oszacowanie każdej z nich z osobna.

499. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}5+2\cdot\ln 4 \qquad \text{czy} \qquad \ln 3+\ln 5+2\cdot\operatorname{arctg}4\,.$$

Rozwiązanie:

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x)=\mathrm{arctg}x-\ln x$. Wówczas

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{-2x^3+x^4+2x^2+1}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^3\cdot(x-2)+x^4+2x^2+1}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)^2},$$

co na pewno jest dodatnie dla $x>2$. Wobec tego funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(2, +\infty)$. Na mocy nierówności Jensena otrzymujemy więc

$$f(4)<\frac{f(3)+f(5)}{2},$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom:

$$2f(4)<f(3)+f(5),$$

$$2\mathrm{arctg}4-2\ln4<\mathrm{arctg}3-\ln3+\mathrm{arctg}5-\ln5,$$

$$2\mathrm{arctg}4+\ln3+\ln5<\mathrm{arctg}3+\mathrm{arctg}5+2\ln4.$$

Odpowiedź:

$$\mathrm{arctg}3+\mathrm{arctg}5+2\cdot\ln4 \qquad > \qquad \ln3+\ln5+2\cdot\mathrm{arctg}4.$$

500. Niech funkcja $f:[0, +\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=e^{\sqrt[3]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6)+f(8) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(7)\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f w przedziale $(0, +\infty)$ otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{4/3}}-\frac{2\cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{4/3}}-\frac{2\cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9\cdot x^{5/3}}<0,$$

$$x^{1/3}<2,$$

$$x<8.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0; 8]$, skąd

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x,y \leqslant 8$.

W szczególności

$$f(6)+f(8)<2\cdot f(7)\,.$$

501. Niech funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\,,$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79)+f(81)=\mathbf{39,79911}... \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(80)=\mathbf{39,79911}...\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}$$

oraz

$$f''(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}\cdot\frac{1}{4\cdot x^{3/4}}-e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{3}{16\cdot x^{7/4}}=e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{x^{1/4}-3}{16\cdot x^{7/4}}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$x^{1/4}-3<0\,,$$

$$x^{1/4}<3\,,$$

$$x<81\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0;81]$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

czyli

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\in[0;81]$.

W szczególności

$$f(79)+f(81)<2\cdot f(80)\,.$$

502. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-10\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600)+f(1602)=\mathbf{-67,54267816}... \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(1601)=\mathbf{-67,54267816}...\ ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{10}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}\,,$$

skąd nierówność $f''(x)<0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{10}{x^2}<0\,,$$

$$\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}>\frac{10}{x^2}\,,$$

$$\sqrt{x}>40\,,$$

$$x>1600\,.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[1600;+\infty)$, skąd

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

czyli

$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x,y\geqslant 1600$.

W szczególności

$$f(1600)+f(1602)<2\cdot f(1601)\,.$$

503. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2+432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36,001)=f(36001/1000)\approx\mathbf{12,0001666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000}=12+\frac{1}{6000}\approx\mathbf{12,0001666666667}\,.$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{2x}{3\cdot\left(x^2+432\right)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3\cdot\left(x^2+432\right)^{2/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=\frac{6\cdot\left(x^2+432\right)}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=$$

$$\frac{6x^2+6\cdot 432-8x^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=\frac{-2x^2+2\cdot 36^2}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}=\frac{2\cdot\left(-x^2+36^2\right)}{9\cdot\left(x^2+432\right)^{5/3}}<0$$

dla $x>36$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[36,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>36$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 36. Ponieważ $f(36)=12$ oraz $f'(36)=1/6$, dla $x>36$ zachodzi nierówność $f(x)<12+(x-36)/6$ i w konsekwencji

$$f(36,001)<12+\frac{0,001}{6}=12+\frac{1}{6000}=\frac{72000}{6000}+\frac{1}{6000}=\frac{72001}{12}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(36,001)$ jest mniejsza od 72001/6000.

504. Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3}<n^{2n}\cdot(n+3)^{n+3}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $n>0$.

Rozwiązanie:

Po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e dana w zadaniu nierówność przybiera postać

$$3\cdot f(n+1)<2\cdot f(n)+f(n+3)\,, \qquad (\spadesuit)$$

gdzie $f(x)=x\cdot\ln x$ dla $x>0$. Ponieważ $f'(x)=\ln x+\frac{x}{x}=\ln x+1$ oraz $f''(x)=1/x>0$, funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,+\infty)$, skąd wynika nierówność

$$f\left(\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3}\cdot y\right)<\frac{2}{3}\cdot f(x)+\frac{1}{3}\cdot f(y)$$

prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y. W szczególności dla $x=n$ oraz $y=n+3$ otrzymujemy

$$f\left(\frac{2}{3}\cdot n+\frac{1}{3}\cdot(n+3)\right)<\frac{2}{3}\cdot f(n)+\frac{1}{3}\cdot f(n+3)\,,$$

czyli

$$f(n+1)<\frac{2}{3}\cdot f(n)+\frac{1}{3}\cdot f(n+3)\,,$$

a to po obustronnym pomnożeniu przez 3 daje nierówność $(\spadesuit)$.

505. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x\leqslant 0 \\ W(x) & \text{dla } 0<x<1 \\ x & \text{dla } x\geqslant 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+g\,.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w zerze, muszą zachodzić warunki

$$W(0)=W'(0)=W''(0)=0\,,$$

skąd

$$d=e=g=0$$

i w konsekwencji

$$W(x)=ax^5+bx^4+cx^3\,.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1)=W'(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad W''(1)=0\,,$$

co wobec

$$W'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2$$

oraz

$$W''(x)=20ax^3+12bx^2+6cx$$

prowadzi do układu równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 1 \\ 5a+4b+3c & = & 1 \\ 20a+12b+6c & = & 0 \end{array}\right.$$

który ma rozwiązanie $a=3$, $b=-8$, $c=6$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest $W(x)=3x^5-8x^4+6x^3$.

506. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccl} -1 & \text{dla} & x\leqslant -1 \\ W(x) & \text{dla} & -1<x<1 \\ 1 & \text{dla} & x\geqslant 1 \end{array}\right.$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+g\,.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w punkcie -1, muszą zachodzić warunki

$$W(-1)=-1 \qquad \text{oraz} \qquad W'(-1)=W''(-1)=0\,.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad W'(1)=W''(1)=0\,,$$

co wobec

$$W'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e$$

oraz

$$W''(x)=20ax^3+12bx^2+6cx+2d$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} -a+b-c+d-e+g &= -1 \\ a+b+c+d+e+g &= 1 \\ 5a-4b+3c-2d+e &= 0 \\ 5a+4b+3c+2d+e &= 0 \\ -20a+12b-6c+2d &= 0 \\ 20a+12b+6c+2d &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dodanie stronami równań pierwszego i drugiego, odjęcie trzeciego i czwartego, dodanie piątego i szóstego daje po uproszczeniu

$$\begin{cases} b+d+g &= 0 \\ 2b+d &= 0 \\ 6b+d &= 0 \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $b=d=g=0$. W konsekwencji układ równań (1) po uproszczeniu przyjmuje postać

$$\begin{cases} a+c+e &= 1 \\ 5a+3c+e &= 0 \\ 10a+3c &= 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a=3/8$, $c=-5/4$, $e=15/8$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest

$$W(x)=\frac{3x^5-10x^3+15x}{8}\,.$$

507. Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-1}{h}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1-A\cdot h}{h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-A}{2h}\,.$$

Przy $h \to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

W celu obliczenia pochodnej drugiego rzędu w zerze musimy najpierw obliczyć pierwszą pochodną poza zerem:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}\,.$$

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h\cdot h-e^h+1}{h^2}-1/2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h\cdot h-e^h+1-\frac{h^2}{2}}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h\cdot h+e^h-e^h-h}{3h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h\cdot h-h}{3h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{3h}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc ponownie zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h}{3}=\frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=1/2$ oraz $f''(0)=1/3$.

508. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)|:x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{2x}{3\cdot\left(x^2+2\right)^{2/3}}\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{3\cdot\left(x^2+2\right)^{2/3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^{-1/3}}{3\cdot\left(1+2\cdot x^{-2}\right)^{2/3}}=0\,.$$

Ponadto

$$f''(x)=\frac{2}{3\cdot(x^2+2)^{2/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot(x^2+2)^{5/3}}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'':

$$\frac{2}{3\cdot(x^2+2)^{2/3}}=\frac{8x^2}{9\cdot(x^2+2)^{5/3}}\,,$$

$$3\cdot\left(x^2+2\right)=4x^2\,,$$

$$6=x^2\,,$$

$$x=\pm\sqrt{6}\,.$$

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'\left(\pm\sqrt{6}\right)=\frac{\pm2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot\left(\left(\pm\sqrt{6}\right)^2+2\right)^{2/3}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot8^{2/3}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{3\cdot4}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/\sqrt{6}$ i $1/\sqrt{6}$, a zatem $C=1/\sqrt{6}$.

509. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=x^5+x\,.$$

Podać dwie pary liczb $(n,\,w)$, gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n)=w\,.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$$f''(\mathbf{2})=-\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{6^3}}=-\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{216}}=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{54}} \qquad f''(\mathbf{34})=-\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{81^3}}=-\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{3^{12}}}$$

510. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w trzech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{4}{3}\right)=\mathbf{-1/4} \qquad f''\left(\frac{14}{3}\right)=\mathbf{-4/125} \qquad f''(12)=\mathbf{-3/500}$$

511. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+2x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

$f''\left(\frac{7}{3}\right)=\mathbf{-2/27}$ $f''\left(\frac{20}{3}\right)=\mathbf{-1/54}$ $f''(15)=\mathbf{-6/1331}$ $f''\left(\frac{88}{3}\right)=\mathbf{-1/729}$

512. Niech

$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(3,01)=f(301/100)\approx\mathbf{2,003375}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{16027}{8000}=2+\frac{27}{8000}=\mathbf{2,003375}$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{3x^2}{5\cdot(x^3+5)^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{6x}{5\cdot(x^3+5)^{4/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot(x^3+5)^{9/5}}=\frac{30x\cdot(x^3+5)}{25\cdot(x^3+5)^{9/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot(x^3+5)^{9/5}}=$$
$$\frac{30x^4+150x-36x^4}{25\cdot(x^3+5)^{9/5}}=\frac{150x-6x^4}{25\cdot(x^3+5)^{9/5}}=\frac{6x\cdot(25-x^3)}{25\cdot(x^3+5)^{9/5}}<0$$

dla $x>\sqrt[3]{25}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{25},\,\infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[3]{27},\,\infty\right)=[3,\,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>3$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=3$. Ponieważ $f(3)=2$ oraz $f'(3)=27/80$, dla $x>3$ zachodzi nierówność

$$f(x)<2+\frac{27\cdot(x-3)}{80}$$

i w konsekwencji

$$f(3,01)<2+\frac{27\cdot 0,01}{80}=2+\frac{27}{8000}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(3,01)$ jest mniejsza od $16027/8000$.