Zadania do omówienia na ćwiczeniach w poniedziałek 16.01.2023 i środę 18.01.2023.

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

12. Pochodna drugiego rzędu i wypukłość funkcji.

494. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=\ln x-\sqrt{x}\,.$$
Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:
$$f(16)+f(18) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(17)\ ?$$

495. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=\ln x-\sqrt[3]{x}\,.$$
Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:
$$f(89)+f(91) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(90)\ ?$$

496. Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem
$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x\,.$$
Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:
$$f(61)+f(63) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(62)\ ?$$

497. Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem
$$f(x)=\sqrt{x}-2\cdot\ln x\,.$$
Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:
$$f(65)+f(67) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(66)\ ?$$

498. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:
$$\mathrm{arctg}100+2\cdot\mathrm{arctg}103+3\cdot\mathrm{arctg}106 \quad \text{czy} \quad 6\cdot\mathrm{arctg}104\ ?$$

499. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:
$$\mathrm{arctg}3+\mathrm{arctg}5+2\cdot\ln 4 \quad \text{czy} \quad \ln 3+\ln 5+2\cdot\mathrm{arctg}4\,.$$

500. Niech funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem
$$f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}\,,$$
gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:
$$f(6)+f(8) \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(7)\ ?$$

501. Niech funkcja $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=e^{\sqrt[4]{x}}\,,$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79)+f(81)=\mathbf{39,79911}... \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(80)=\mathbf{39,79911}...\ ?$$

502. Niech funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-10\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600)+f(1602)=-\mathbf{67,54267816}... \quad \text{czy} \quad 2\cdot f(1601)=-\mathbf{67,54267816}...\ ?$$

503. Niech $f(x)=\sqrt[3]{x^2+432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36,001)=f(36001/1000)\approx\mathbf{12,0001666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000}=12+\frac{1}{6000}\approx\mathbf{12,0001666666667}\,.$$

504. Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3}<n^{2n}\cdot(n+3)^{n+3}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $n>0$.

505. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x\leqslant 0\\ W(x) & \text{dla } 0<x<1\\ x & \text{dla } x\geqslant 1\end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

506. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{dla } x\leqslant -1\\ W(x) & \text{dla } -1<x<1\\ 1 & \text{dla } x\geqslant 1\end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

507. Niech

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{dla } x\neq 0\\ A & \text{dla } x=0\end{cases}$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?
b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

508. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y| \ .$$

509. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=x^5+x\,.$$

Podać dwie pary liczb $(n,\,w)$, gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n)=w\,.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$f''(\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\ldots$ $f''(\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\ldots$

510. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w trzech podanych punktach.

$f''\left(\frac{4}{3}\right)=\ldots\ldots\ldots$ $f''\left(\frac{14}{3}\right)=\ldots\ldots\ldots$ $f''(12)=\ldots\ldots\ldots$

511. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+2x\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

$f''\left(\frac{7}{3}\right)=\ldots\ldots$ $f''\left(\frac{20}{3}\right)=\ldots\ldots$ $f''(15)=\ldots\ldots$ $f''\left(\frac{88}{3}\right)=\ldots\ldots$

512. Niech

$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(3,01)=f(301/100)\approx\mathbf{2,003375}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{16027}{8000}=2+\frac{27}{8000}=\mathbf{2,003375}$$