442. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f, tzn. $f(g(x))=g(f(x))=x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Podać wzór na pochodną funkcji g. Podać przykład takiej liczby wymiernej $x>1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Równość $g(x)=y$ jest równoważna równości $f(y)=x$, czyli

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

lub inaczej

$$x=\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\,, \tag{$\clubsuit$}$$

jeśli przyjmiemy $t=e^y$. Przy tych oznaczeniach mamy $t>0$ i $y=\ln t$. Rozwiązujemy równanie ($\clubsuit$) tak, aby wyznaczyć t w zależności od x:

$$2xt=t^2-1\,,$$

$$t^2-2xt-1=0\,,$$

$$t=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}\,,$$

$$t=x\pm\sqrt{x^2+1}\,,$$

skąd wobec $t>0$ musimy przyjąć "$\pm$" = "$+$". Ostatecznie

$$t=x+\sqrt{x^2+1}$$

i w konsekwencji

$$g(x)=y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,.$$

Mając jawny wzór określający funkcję g bez trudu obliczamy jej pochodną:

$$g'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=4/3$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x)=g'(4/3)=\frac{1}{\sqrt{16/9+1}}=\frac{1}{\sqrt{25/9}}=\frac{3}{5}\,.$$

Sposób II:

Zauważmy, że

$$f'(y)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\sqrt{\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}}=\sqrt{\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}+1}=\sqrt{\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2+1}=$$

$$=\sqrt{\left(f(y)\right)^2+1}\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{\sqrt{(f(g(x)))^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy równość

$$f'(y)=\sqrt{(f(y))^2+1}$$

dla $y=g(x)$.

Dla urozmaicenia tym razem jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=12/5$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x)=g'(12/5)=\frac{1}{\sqrt{144/25+1}}=\frac{1}{\sqrt{169/25}}=\frac{5}{13}\,.$$

443. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^5+x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x)=5x^4+1\,.$$

Zauważmy też, że

$$g(0)=0,\quad g(1)=2\quad\text{oraz}\quad g(2)=34\,,$$

skąd odpowiednio

$$f(0)=0,\quad f(2)=1\quad\text{oraz}\quad f(34)=2\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}\,,$$

co po podstawieniu kolejno $x=0$, $x=2$ i $x=34$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0)=\frac{1}{g'(f(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{5\cdot 0^4+1}=\frac{1}{1}=1\,,$$

$$f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{5\cdot 1^4+1}=\frac{1}{6}$$

i

$$f'(34)=\frac{1}{g'(f(34))}=\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{5\cdot 2^4+1}=\frac{1}{81}\,.$$

Odpowiedź:

$$f'(0)=1,\quad f'(2)=\frac{1}{6}\quad\text{oraz}\quad f'(34)=\frac{1}{81}\,.$$

444. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem
$$g'(x)=3x^2+9\,.$$
Zauważmy też, że
$$g(0)=0, \quad g(1)=10 \quad \text{oraz} \quad g(4)=100\,,$$
skąd odpowiednio
$$f(0)=0, \quad f(10)=1 \quad \text{oraz} \quad f(100)=4\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy
$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}\,,$$
co po podstawieniu kolejno $x=0$, $x=10$ i $x=100$ prowadzi odpowiednio do
$$f'(0)=\frac{1}{g'(f(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{3\cdot 0^2+9}=\frac{1}{9}\,,$$
$$f'(10)=\frac{1}{g'(f(10))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{3\cdot 1^2+9}=\frac{1}{12}$$
i
$$f'(100)=\frac{1}{g'(f(100))}=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{3\cdot 4^2+9}=\frac{1}{57}\,.$$

Odpowiedź:
$$f'(0)=\frac{1}{9}, \quad f'(10)=\frac{1}{12} \quad \text{oraz} \quad f'(100)=\frac{1}{57}\,.$$

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

445. $f_1(x)=x^3+x$ $\qquad g_1'(0)=\mathbf{1}$ $\qquad g_1'(2)=\mathbf{1/4}$ $\qquad g_1'(130)=\mathbf{1/76}$

446. $f_2(x)=x^7+x$ $\qquad g_2'(0)=\mathbf{1}$ $\qquad g_2'(2)=\mathbf{1/8}$ $\qquad g_2'(130)=\mathbf{1/449}$

447. $f_3(x)=x^3+5x$ $\qquad g_3'(0)=\mathbf{1/5}$ $\qquad g_3'(6)=\mathbf{1/8}$ $\qquad g_3'(42)=\mathbf{1/32}$

448. $f_4(x)=x^5+5x$ $\qquad g_4'(0)=\mathbf{1/5}$ $\qquad g_4'(6)=\mathbf{1/10}$ $\qquad g_4'(42)=\mathbf{1/85}$

449. $f_5(x)=x^3+2x$ $\qquad g_5'(3)=\mathbf{1/5}$ $\qquad g_5'(12)=\mathbf{1/14}$ $\qquad g_5'(72)=\mathbf{1/50}$

450. $f_6(x)=x^3+4x$ $\qquad g_6'(5)=\mathbf{1/7}$ $\qquad g_6'(16)=\mathbf{1/16}$ $\qquad g_6'(80)=\mathbf{1/52}$

451. $f_7(x)=2x^3+x$ $\qquad g_7'(3)=\mathbf{1/7}$ $\qquad g_7'(18)=\mathbf{1/25}$ $\qquad g_7'(57)=\mathbf{1/55}$

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcja $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f_i\left(g_i(x)\right)=x^3+3x\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

452. $g_1(x)=x^3+x+6$ $\quad f_1'(8)=\mathbf{3/2}$ $\quad f_1'(16)=\mathbf{15/13}$ $\quad f_1'(36)=\mathbf{15/14}$

453. $g_2(x)=x^3+2x+3$ $\quad f_2'(6)=\mathbf{6/5}$ $\quad f_2'(15)=\mathbf{15/14}$ $\quad f_2'(36)=\mathbf{30/29}$

454. $g_3(x)=2x^3+x$ $\quad f_3'(3)=\mathbf{6/7}$ $\quad f_3'(18)=\mathbf{3/5}$ $\quad f_3'(57)=\mathbf{6/11}$

455. $g_4(x)=x^5+x+2$ $\quad f_4'(2)=\mathbf{3}$ $\quad f_4'(4)=\mathbf{1}$ $\quad f_4'(36)=\mathbf{5/27}$

456. $g_5(x)=x^5+2x$ $\quad f_5'(0)=\mathbf{3/2}$ $\quad f_5'(3)=\mathbf{6/7}$ $\quad f_5'(36)=\mathbf{15/82}$

457. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2020 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{e}\right)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$e^y=\frac{e^x+1}{e^x-1}\,,$$
$$e^x\cdot e^y-e^y=e^x+1\,,$$
$$e^x\cdot e^y-e^x-e^y=1\,.$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y, krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x=y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x))=x$ dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x. W konsekwencji $g(x)=x$ dla $x>0$ i $g'(x)=1$. W szczególności $g'\left(\sqrt{e}\right)=1$ jest liczbą wymierną.

458. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}-\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)$$

na przedziale $[10, 50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

Wskazówka: $f=g\circ h$, gdzie

$$g(t)=\operatorname{arctg}(t-1)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

oraz

$$h(x)=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Funkcja $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$g(t)=\operatorname{arctg}(t-1)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

ma pochodną

$$g'(t)=\frac{1}{(t-1)^2+1}+\frac{-2/t^2}{\left(\frac{2}{t}-1\right)^2+1}=\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{2}{(2-t)^2+t^2}=$$

$$=\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{2}{4-4t+2t^2}=\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{1}{2-2t+t^2}=0\,,$$

jest więc stała. Ponieważ

$$g(1)=\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}\,,$$

mamy $g(t)=\pi/4$ dla każdego $t\in(0,+\infty)$.

Pozostaje zauważyć, że przyjmując

$$t=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}$$

otrzymujemy

$$\frac{2}{t}=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}-\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\,,$$

skąd

$$f(x)=g(t)=\frac{\pi}{4}\,.$$

Zatem f jest funkcją stałą równą $\pi/4$. W konsekwencji przyjmuje ona na całym rozważanym przedziale $[10,50]$ największą (a zarazem najmniejszą) wartość $\pi/4$ (niewymierną, bo π jest niewymierne).

459. Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, jest określona wzorem

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$y^3=\frac{x^3}{x^3-1}\,,$$

$$x^3y^3-y^3=x^3\,,$$

$$x^3y^3=x^3+y^3\,.$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y, krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x=y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x))=x$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 1$. W konsekwencji $g(x)=x$ dla $x\neq 1$, wobec czego $g'(x)=1$. W szczególności $g'\left(\sqrt{2}\right)=1$ jest liczbą wymierną.

460. Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{0,\,1\}$, jest określona wzorem

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}\,.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\,,$$

skąd

$$f(f(x))=\sqrt[3]{1-\frac{1}{\left(f(x)\right)^3}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x^3}}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{\frac{x^3-1}{x^3}}}=\sqrt[3]{1-\frac{x^3}{x^3-1}}=\sqrt[3]{\frac{-1}{x^3-1}}$$

oraz

$$f(f(f(x)))=\sqrt[3]{1-\frac{1}{\left(f(f(x))\right)^3}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{\frac{-1}{x^3-1}}}=\sqrt[3]{1+x^3-1}=\sqrt[3]{x^3}=x\,.$$

Z otrzymanej równości $f(f(f(x)))=x$ wynika $g(x)=x$ dla $x\in Z$, co daje $g'(x)=1$. W szczególności $g'\left(\sqrt{2}\right)=1$ jest liczbą wymierną.

461. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{2h}-2h^2-2h-1}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2h^2-2h-1-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{2h}-4h-2-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4e^{2h}-4-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{8e^{2h}-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{8-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=4/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{16e^{2h}}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=4/3$ i wówczas $f'(0)=2/3$.

462. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\cos h}{e^h-1-h}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h-Ae^h+A+Ah}{he^h-h-h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-Ae^h+A}{e^h+he^h-1-2h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-Ae^h}{2e^h+he^h-2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h-e^h}{3e^h+he^h}=-\frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=-1/3$.

463. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x\neq 0\\ A & \text{dla } x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{3h}-e^{2h}-\ln(1+h)}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-e^{2h}-\ln(1+h)-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{3e^{3h}-2e^{2h}-\frac{1}{1+h}-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{9e^{3h}-4e^{2h}+\frac{1}{(1+h)^2}-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{6-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=3$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{27e^{3h}-8e^{2h}-\frac{2}{(1+h)^3}}{6}=\frac{17}{6}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=3$ i wówczas $f'(0)=17/6$.

464. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2he^{-h}-\ln(1+2h)}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2he^{-h}-\ln(1+2h)-Ah^3}{h^4}.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{-h}-2he^{-h}-\frac{2}{1+2h}-3Ah^2}{4h^3}.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-4e^{-h}+2he^{-h}+\frac{4}{(1+2h)^2}-6Ah}{12h^2}.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{6e^{-h}-2he^{-h}-\frac{16}{(1+2h)^3}-6A}{24h}.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-10-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=-5/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-8e^{-h}+2he^{-h}+\frac{96}{(1+2h)^4}}{24}=\frac{-8+96}{24}=\frac{88}{24}=\frac{11}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=-5/3$ i wówczas $f'(0)=11/3$.

465. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-\sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-\sqrt{1+h}}{\ln(1+h)}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\sqrt{1+h}-A\cdot\ln(1+h)}{h\cdot\ln(1+h)}.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+h}}-\frac{A}{1+h}}{\ln(1+h)+\frac{h}{1+h}}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1/2-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1/2$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h+\frac{1}{4\cdot(1+h)^{3/2}}+\frac{1/2}{(1+h)^2}}{\frac{1}{1+h}+\frac{1}{(1+h)^2}}=\frac{7}{8}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1/2$ i wówczas $f'(0)=7/8$.

466. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{e^x}-e^{x+1}}{x^2} & \text{dla}\quad x\neq 0\\[2mm] A & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{e^h}-e^{h+1}}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}-e^{h+1}-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{e-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=e/2$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^{3h}+2\cdot e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}}{6}=\frac{4e}{6}=\frac{2e}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=e/2$ i wówczas $f'(0)=2e/3$.