

Kolokwium nr 5: wtorek 10.01.2023, godz. 10:15-11:45, materiał zad. 1-466.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w środę 21.12.2022, środę 4.01.2023 i poniedziałek 9.01.2023.**

Zadania podobne do zadań wcześniejszych można pominąć, jeśli nie sprawiają trudności.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

10. Pochodna funkcji (c.d.)

442. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f , tzn. $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Podać wzór na pochodną funkcji g . Podać przykład takiej liczby wymiernej $x > 1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

443. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $g(x) = x^5 + x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

444. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $g(x) = x^3 + 9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

$$445. \quad f_1(x) = x^3 + x \quad g'_1(0) = \dots \quad g'_1(2) = \dots \quad g'_1(130) = \dots$$

$$446. \quad f_2(x) = x^7 + x \quad g'_2(0) = \dots \quad g'_2(2) = \dots \quad g'_2(130) = \dots$$

$$447. \quad f_3(x) = x^3 + 5x \quad g'_3(0) = \dots \quad g'_3(6) = \dots \quad g'_3(42) = \dots$$

$$448. \quad f_4(x) = x^5 + 5x \quad g'_4(0) = \dots \quad g'_4(6) = \dots \quad g'_4(42) = \dots$$

$$449. \quad f_5(x) = x^3 + 2x \quad g'_5(3) = \dots \quad g'_5(12) = \dots \quad g'_5(72) = \dots$$

$$450. \quad f_6(x) = x^3 + 4x \quad g'_6(5) = \dots \quad g'_6(16) = \dots \quad g'_6(80) = \dots$$

$$451. \quad f_7(x) = 2x^3 + x \quad g'_7(3) = \dots \quad g'_7(18) = \dots \quad g'_7(57) = \dots$$

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f_i(g_i(x)) = x^3 + 3x.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

$$452. \quad g_1(x) = x^3 + x + 6 \quad f'_1(8) = \dots \quad f'_1(16) = \dots \quad f'_1(36) = \dots$$

$$453. g_2(x) = x^3 + 2x + 3 \quad f'_2(6) = \dots \quad f'_2(15) = \dots \quad f'_2(36) = \dots$$

$$454. g_3(x) = 2x^3 + x \quad f'_3(3) = \dots \quad f'_3(18) = \dots \quad f'_3(57) = \dots$$

$$455. g_4(x) = x^5 + x + 2 \quad f'_4(2) = \dots \quad f'_4(4) = \dots \quad f'_4(36) = \dots$$

$$456. g_5(x) = x^5 + 2x \quad f'_5(0) = \dots \quad f'_5(3) = \dots \quad f'_5(36) = \dots$$

457. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2020 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{e})$ jest wymierna.

458. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} + \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1} - 1 \right) + \operatorname{arctg} \left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} - \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1} - 1 \right)$$

na przedziale $[10, 50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

Wskazówka: $f = g \circ h$, gdzie

$$g(t) = \operatorname{arctg}(t - 1) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{t} - 1 \right)$$

oraz

$$h(x) = \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} + 1} + \sqrt{e^{e^{x^{2020}}} - 1}.$$

459. Funkcja $f : Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

460. Funkcja $f : Z \rightarrow Z$, gdzie $Z = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f :

$$g(x) = f(f(f(\dots f(f(x))\dots))).$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'(\sqrt{2})$ jest wymierna.

461. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 2x^2 - 2x - 1}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

462. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

463. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{2x} - \ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

464. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2xe^{-x} - \ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

465. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .

466. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A , że funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{e^x} - e^{x+1}}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A .