Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w poniedziałek 10.10.2022 i środę 12.10.2022.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

1. Indukcja matematyczna. Dwumian Newtona.

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

1. $\sum_{i=3}^{5} i^2$ **2.** $\sum_{i=-99}^{100} i^3$ **3.** $\sum_{i=-10}^{10} 7$ **4.** $\sum_{i=1}^{100} i$ **5.** $\sum_{i=1}^{24} i^2$ **6.** $\prod_{i=1}^{6} i$ **7.** $\prod_{i=-2020}^{2020} i^{2020}$

8. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja:

a) $x > 0 \Rightarrow x+1 > 2$ **b)** $x < 1 \Rightarrow x^2 > 0$ **c)** $x < 1 \Rightarrow x^2 < 0$ **d)** $x^5 > 32 \Rightarrow x^6 > 64$

e) $x^6 > 64 \Rightarrow x^7 > 128$ **f)** $x^5 < 32 \Rightarrow x^6 < 64$ **g)** $x^6 < 64 \Rightarrow x^7 < 128$

OSZUSTWO **9.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110\,. \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2+110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że
dla $n=2$ mamy $60 < 4+110 = 114$,
dla $n=3$ mamy $90 < 8+110 = 118$,
dla $n=4$ mamy $120 < 16+110 = 126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n=6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

10. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

11. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}.$$

12. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k<n$ spełniających równanie

$$k\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}.$$

13. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}.$$

14. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\geqslant 4^n.$$

15. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geqslant$, $\leqslant$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}.$$

16. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}>7\cdot 4^{n-1}.$$

17. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4)\cdot\binom{2n}{n}>2^{2n+1}.$$

18. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n\cdot\binom{2n}{n}^2\geqslant 4^{2n-1}.$$

19. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

20. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n .$$

21. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\sqrt[n]{25} \cdot \binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27} \cdot \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n} .$$

22. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$2^{65} \cdot n \leqslant 2^n + 2^{71} .$$

23. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n} .$$

24. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$3^{28} \cdot n \leqslant 3^n + 3^{31} .$$

25. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$n \cdot \binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} < (n+1) \cdot \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n} .$$

26. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geqslant \frac{3^{n-1}}{2} .$$

27. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n}{n} \cdot \sqrt{15n+4} < 9 \cdot 4^{n-1} .$$

Przypomnij sobie ze szkoły: Wzory skróconego mnożenia.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.
Mogą być omówione na ćwiczeniach w miarę wolnego czasu,

28. Wiadomo, że wśród następujących sześciu liczb

$$3465^2-2,\quad 3465^2-4,\quad 3465^2-8,\quad 3465^2-16,\quad 3465^2-32,\quad 3465^2-64$$

trzy są pierwsze, a trzy złożone. Które z podanych liczb są pierwsze?

29. Uzupełnić wzory skróconego mnożenia. Kropki występujące po lewej stronie równości zastąpić pojedynczym znakiem.

a) $(x+2)^2=x^2+\ldots$
b) $a^3+b^3=(a+b)\cdot\ldots$
c) $a^3-b^3=(a-b)\cdot\ldots$
d) $a^3\ldots b^3=(a^2+ab+b^2)\cdot\ldots$
e) $a^4\ldots b^4=(a+b)\cdot\ldots$
f) $a^4\ldots b^4=(a-b)\cdot\ldots$
g) $a^5\ldots b^5=(a+b)\cdot\ldots$
h) $a^5\ldots b^5=(a-b)\cdot\ldots$
i) $(a+b)^3=a^3+3\ldots$
j) $(a-b)^4=a^4-\ldots$
k) $(a-b)^5=a^5-\ldots$
l) $a^n-b^n=(a-b)\cdot\ldots$
m) $a^n+b^n=(a+b)\cdot\ldots$ - dla których n ?
n) $a^n-b^n=(a+b)\cdot\ldots$ - dla których n ?
o) $a^n+b^n=(a^2+b^2)\cdot\ldots$ - dla których n ?
p) $a^n-b^n=(a^2+b^2)\cdot\ldots$ - dla których n ?

30. W liczbie dziewięciocyfrowej podanych jest 5 cyfr. Wpisz brakujące 4 cyfry tak, aby uzyskana liczba była kwadratem liczby całkowitej.

a)	1	0	0	1	8				;
b)	4	0	0	2	4				;
c)	9	0	0	2	4				;
d)	9	0	0	4	8				.

31. Zapisz podaną liczbę wymierną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{7}+1}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{11}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{11}+1}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; d) $\dfrac{1}{\sqrt{13}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{13}+1}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

32. Zapisz podaną liczbę w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych większych od 1.
a) $9\,991=$ .... ; b) $89\,951=$ .... ;
c) $999\,919=$ .... ; d) $8\,999\,999=$ ....

33. Dla danej liczby n podaj dwucyfrową liczbę pierwszą p będącą dzielnikiem liczby n.
a) $n=77^{111}-24^{111}$, $p=$ .... ; b) $n=69^{122}-20^{122}$, $p=$ .... ;
c) $n=51^{133}+22^{133}$, $p=$ .... ; d) $n=66^{166}-31^{166}$, $p=$ ....

34. Wiedząc, że
$$\binom{14}{4}=1001, \qquad \binom{14}{5}=2002, \qquad \binom{14}{6}=3003,$$
podać wartość współczynnika dwumianowego
a) $\binom{15}{5}=$ .... ; b) $\binom{15}{6}=$ .... ; c) $\binom{16}{6}=$ .... ; d) $\binom{15}{10}=$ ....

35. Dla podanych liczb a oraz k wskazać taką liczbę naturalną n, aby zachodziła równość
$$\left(a^{a^k}\right)^{a^{a^k}}=a^{a^n}.$$
Uwaga: Potęgowanie wykonuje się *od góry*, tzn. $a^{b^c}=a^{(b^c)}$.
a) $a=5$, $k=2$, $n=$.................. ; b) $a=3$, $k=3$, $n=$.................. ;
c) $a=2$, $k=5$, $n=$.................. ; d) $a=3$, $k=4$, $n=$..................

36. Wskazać taką liczbę C, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n i k, gdzie $n\geqslant k+2$, prawdziwa jest równość
$$\binom{n}{k}+C\cdot\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}=\binom{n+2}{k+2}.$$

37. Uporządkować rosnąco następujące liczby:
$$\binom{100}{7},\ \binom{100}{27},\ \binom{100}{47},\ \binom{100}{57},\ \binom{100}{77},\ \binom{100}{97}.$$

38. Dowieść, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych a,b,c zachodzi równość
$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\binom{a+b+c}{b}\binom{a+c}{a}.$$