

Zadanie **31.** (zadanie dodatkowe)

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+4)}.$$

Zadanie **32.** (zadanie dodatkowe)

Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \ln(x^4 + 48).$$

Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

Zadanie **33.** (zadanie dodatkowe)

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 11}.$$

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa

$$f(5) + \frac{4}{27} = 3,45\dots \quad \text{czy} \quad f(5,5) = f(11/2) = 3,45\dots ?$$

Zadanie **34.** (zadanie dodatkowe)

Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y + 1)^2.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Zadanie **35.** (zadanie dodatkowe)

Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna.

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y istnieje takie $t \in (0, 1)$, że dla liczby $c = x + t \cdot (y - x)$ spełniony jest warunek

$$f(x) + f(y) - 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f''(c) \cdot (x-y)^2}{4}.$$