KOLOKWIUM Specjalne, 7.02.2023, godz. 10:15–12:00

Zadanie **31. (zadanie dodatkowe)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+4)}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+4)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}+\frac{D}{n+4}\,,$$

$$1=A\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+4)+B\cdot n\cdot(n+2)\cdot(n+4)+C\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+4)+D\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\,,$$

$$\text{dla } n=0: \quad 1=8A, \quad A=1/8\,,$$

$$\text{dla } n=-1: \quad 1=-3B, \quad B=-1/3\,,$$

$$\text{dla } n=-2: \quad 1=4C, \quad C=1/4\,,$$

$$\text{dla } n=-4: \quad 1=24D, \quad D=-1/24\,.$$

Zatem

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+4)}=\frac{1/8}{n}-\frac{1/3}{n+1}+\frac{1/4}{n+2}-\frac{1/24}{n+4}\,.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+4)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/8}{n}-\frac{1/3}{n+1}+\frac{1/4}{n+2}-\frac{1/24}{n+4}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/8}{1}-\frac{1/3}{2}+\frac{1/4}{3}-\frac{1/24}{5}\right)+\left(\frac{1/8}{2}-\frac{1/3}{3}+\frac{1/4}{4}-\frac{1/24}{6}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/8}{3}-\frac{1/3}{4}+\frac{1/4}{5}-\frac{1/24}{7}\right)+\left(\frac{1/8}{4}-\frac{1/3}{5}+\frac{1/4}{6}-\frac{1/24}{8}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1/8}{N-3}-\frac{1/3}{N-2}+\frac{1/4}{N-1}-\frac{1/24}{N+1}\right)+\left(\frac{1/8}{N-2}-\frac{1/3}{N-1}+\frac{1/4}{N}-\frac{1/24}{N+2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/8}{N-1}-\frac{1/3}{N}+\frac{1/4}{N+1}-\frac{1/24}{N+3}\right)+\left(\frac{1/8}{N}-\frac{1/3}{N+1}+\frac{1/4}{N+2}-\frac{1/24}{N+4}\right)=$$

$$=\frac{1/8}{1}-\frac{5/24}{2}+\frac{1/24}{3}+\frac{1/24}{4}-\frac{1/8}{N+1}+\frac{5/24}{N+2}-\frac{1/24}{N+3}-\frac{1/24}{N+4}=$$

$$=\frac{36-30+4+3}{288}-\frac{1/8}{N+1}+\frac{5/24}{N+2}-\frac{1/24}{N+3}-\frac{1/24}{N+4}\to\frac{13}{288}$$

przy $N\to\infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa 13/288.

Zadanie **32. (zadanie dodatkowe)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(x^4+48\right).$$

Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\cdot|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Zatem najmniejsza stała C, z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)|: x\in\mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{4x^3}{x^4+48}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3}{x^4+48}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x+\frac{48}{x^3}}=0.$$

Ponadto

$$f''(x)=\frac{12x^2\cdot(x^4+48)-4x^3\cdot 4x^3}{(x^4+48)^2}=\frac{12x^6+12\cdot 48x^2-16x^6}{(x^4+48)^2}=\frac{12\cdot 48x^2-4x^6}{(x^4+48)^2}.$$

Równanie na zerowanie się f'' przyjmuje postać

$$12\cdot 48x^2=4x^6,$$

$$12\cdot 12x^2=x^6,$$

co ma rozwiązania

$$x=0 \qquad \text{oraz} \qquad x=\pm 2\cdot\sqrt{3}.$$

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'(0)=0,$$

$$f'\left(\pm 2\cdot\sqrt{3}\right)=\frac{\pm 4\cdot 8\cdot\sqrt{27}}{16\cdot\sqrt{81}+48}=\frac{\pm 32\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{16\cdot 9+48}=\frac{\pm 32\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{48\cdot 3+48\cdot 1}=\frac{\pm 32\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{48\cdot 4}=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-\sqrt{3}/2$ i $\sqrt{3}/2$, a zatem $C=\sqrt{3}/2$.

Odpowiedź: Najmniejsza stałą spełniającą warunki zadania jest $C=\sqrt{3}/2$.

Zadanie **33. (zadanie dodatkowe)**

Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+11}\,.$$

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa

$$f(5)+\frac{4}{27}=3,45\ldots \qquad \text{czy} \qquad f(5,5)=f(11/2)=3,45\ldots\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczmy pochodne funkcji f:

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\left(x^2+11\right)^{-2/3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+11\right)^{-2/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{2x^2+22}{3}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=\frac{6x^2+66-8x^2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{-2x^2+66}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=\left(33-x^2\right)\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3} \;>\; 0\,, \qquad \text{o ile} \qquad x^2<33\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\left[-\sqrt{33},\sqrt{33}\right]$ zawierającym[1] przedział $[4;\,5,5]$, a jej pochodna f' jest w tym przedziale rosnąca.

Zatem wykres funkcji f na przedziale $(5;\,5,5]$ leży powyżej stycznej do wykresu w punkcie odpowiadającym $x=5$. Wobec tego

$$f(x)>f(5)+f'(5)\cdot(x-5) \qquad \text{dla} \qquad x\in(5;\,5,5],$$

skąd po uwzględnieniu

$$f'(5)>f'(4)=\frac{8}{27}$$

otrzymujemy

$$f(5,5)>f(5)+f'(5)\cdot(5,5-5)>f(5)+f'(4)\cdot 0,5=f(5)+\frac{8}{27}\cdot 0,5=f(5)+\frac{4}{27}\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(5)+\dfrac{4}{27}$ jest mniejsza od $f(5,5)=f(11/2)$.

[1]Zauważmy, że

$$5,5=\sqrt{30,25}<\sqrt{33}\,.$$

Zadanie **34.** **(zadanie dodatkowe)**

Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y+1)^2\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Przyjmując w podanym w treści zadania warunku $y=x+1$ otrzymujemy

$$|f(x)-f(x+1)|\leqslant(x-(x+1)+1)^2=0^2=0\,,$$

skąd $f(x)=f(x+1)$ dla dowolnego x, a więc funkcja f jest okresowa z okresem 1.

Wobec tego dla dowolnych x, y otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(y+1)|\leqslant(x-(y+1)+1)^2=(x-y)^2\,,$$

czyli

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Na podstawie warunku $(\diamondsuit)$ wykażemy, że funkcja f jest stała.

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste x, y. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy

$$t_0=x,\quad t_1=x+\frac{y-x}{n},\quad t_2=x+2\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_3=x+3\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_4=x+4\cdot\frac{y-x}{n},\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad t_{n-2}=x+(n-2)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_{n-1}=x+(n-1)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_n=x+n\cdot\frac{y-x}{n}=y\,.$$

Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

Wówczas na mocy warunku $(\diamondsuit)$ zachodzą nierówności

$$|f(t_0)-f(t_1)|\leqslant(t_0-t_1)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant(t_1-t_2)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

$$|f(t_2)-f(t_3)|\leqslant(t_2-t_3)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

....

$$|f(t_{n-2})-f(t_{n-1})|\leqslant(t_{n-2}-t_{n-1})^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$

$$|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant(t_{n-1}-t_n)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy

$$|f(x)-f(y)|=$$

$$=|(f(t_0)-f(t_1))+(f(t_1)-f(t_2))+(f(t_2)-f(t_3))+\ldots+(f(t_{n-1})-f(t_n))|\leqslant$$

$$\leqslant|f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+|f(t_2)-f(t_3)|+\ldots+|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\ldots+\frac{(x-y)^2}{n^2}=\frac{(x-y)^2}{n}\,.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{(x-y)^2}{n}$$

prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

Zadanie **35. (zadanie dodatkowe)**

Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna.

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y istnieje takie $t\in(0,1)$, że dla liczby $c=x+t\cdot(y-x)$ spełniony jest warunek

$$f(x)+f(y)-2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f''(c)\cdot(x-y)^2}{4}\ .$$

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $x_0=\dfrac{x+y}{2}$.

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej liczby

$$c_1=x_0+t_1\cdot(x-x_0)\ ,$$

gdzie $t_1\in(0,1)$, że

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(c_1)\cdot(x-x_0)^2}{2}\ .$$

Podobnie, istnieje taka liczba

$$c_2=x_0+t_2\cdot(y-x_0)\ ,$$

gdzie $t_2\in(0,1)$, że

$$f(y)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(y-x_0)+\frac{f''(c_2)\cdot(y-x_0)^2}{2}\ .$$

Dodanie stronami powyższych równości prowadzi do

$$f(x)+f(y)=2\cdot f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0+y-x_0)+\frac{f''(c_1)\cdot(x-x_0)^2+f''(c_2)\cdot(y-x_0)^2}{2}\ ,$$

co po uwzględnieniu równości $x_0=\dfrac{x+y}{2}$ i dokonaniu odpowiednich uproszczeń daje

$$f(x)+f(y)-2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{(f''(c_1)+f''(c_2))\cdot(x-y)^2}{8}\ .$$

Z własności Darboux funkcji f'' wynika istnienie takiej liczby c pomiędzy c_1 i c_2, że

$$f''(c)=\frac{f''(c_1)+f''(c_2)}{2}\ ,$$

co prowadzi do

$$f(x)+f(y)-2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{2\cdot f''(c)\cdot(x-y)^2}{8}=\frac{f''(c)\cdot(x-y)^2}{4}\ .$$