

ANALIZA 1, KOŁOKWIUM nr **6**, **24.01.2023**, godz. 10:15–11:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **13.** (10 punktów)

Dowieść, że liczba

$$\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$$

jest niewymierna.

Zadanie **14.** (10 punktów)

Niech

$$f(x) = \sqrt{x} - 100 \cdot \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$f(159\,998) + f(160\,000) \approx -1596.5870688431928$$

czy

$$2 \cdot f(159\,999) \approx -1596.5870688431928$$

Zadanie **15.** (10 punktów)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{121} \cdot n \leq 2^n + 15 \cdot 2^{124}.$$

Zadanie **16.** (10 punktów)

Niech

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 5}.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(2,1) = f(21/10) \approx 3,30$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{89}{27} = 3 + \frac{8}{27} \approx 3,30$$

Zadanie **24.** (zadanie dodatkowe)

Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f''(x) \geq 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{(x-y)^2}{8}.$$

Zadanie **25.** (zadanie dodatkowe)

Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdych różnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{|x-y|}.$$

Udowodnić, że funkcja f jest stała.

Zadanie **26.** (zadanie dodatkowe)

Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b , aby funkcja f określona wzorem

$$f(x) = x + \frac{1 - \sqrt{kx+1}}{2}$$

na przedziale $[-1/k, b]$ była odwrotna do samej siebie.