KOLOKWIUM nr 6, 24.01.2023, godz. 10:15–11:45

Zadanie **13. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba

$$\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)=-\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{4}{15}\right)^{-m/n}=\frac{15}{8}\,,$$

$$\left(\frac{4}{15}\right)^{-m}=\left(\frac{15}{8}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^{m}=\left(\frac{15}{8}\right)^{n}\,,$$

$$15^m\cdot 8^n=15^n\cdot 4^m\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n}\cdot 3^m\cdot 5^m=2^{2m}\cdot 3^n\cdot 5^n\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 3n &= 2m \\ m &= n \\ m &= n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m=3n>2n=2m\,,$$

czyli $2m>2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(4/15)}\left(\frac{15}{8}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:
• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami piętnastki,
lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są nieujemne.

Zadanie **14. (10 punktów)**
Niech
$$f(x)=\sqrt{x}-100\cdot\ln x\,.$$
Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:
$$f(159\,998)+f(160\,000)\approx -\mathbf{1596.5870688431928}$$
czy
$$2\cdot f(159\,999)\approx -\mathbf{1596.5870688431928}$$

Rozwiązanie:
Różniczkując funkcję f otrzymujemy
$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{100}{x}$$
oraz
$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{100}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+400}{4\cdot x^2}>0$$
dla $x<160\,000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0,\,160\,000)$. Zatem
$$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$
czyli
$$f(x)+f(y)>2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych $x,y\in(0,\,160\,000))$.
W szczególności
$$f(159\,998)+f(160\,000)>2\cdot f(159\,999)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $f(159\,998)+f(160\,000)$ jest większa od $2\cdot f(159\,999)$.

Zadanie **15.** **(10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{121}\cdot n\leqslant 2^{n}+15\cdot 2^{124}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 120$.

Dla $n\leqslant 120$ zachodzą nierówności

$$2^{121}\cdot n\leqslant 2^{121}\cdot 120=2^{124}\cdot 15<2^{n}+15\cdot 2^{124}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 121$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=121$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{121}\cdot 121\,,$$

$$P=2^{121}+15\cdot 2^{124}=2^{121}+15\cdot 8\cdot 2^{121}=121\cdot 2^{121}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 121$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{121}\cdot n\leqslant 2^{n}+15\cdot 2^{124}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{121}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+15\cdot 2^{124}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 121$ otrzymujemy

$$L=2^{121}\cdot(n+1)=2^{121}\cdot n+2^{121}\leqslant 2^{n}+15\cdot 2^{124}+2^{121}\leqslant 2^{n}+15\cdot 2^{124}+2^{n}=2^{n+1}+15\cdot 2^{124}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **16. (10 punktów)**
Niech

$$f(x)=\sqrt[3]{x^5-5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(2,1)=f(21/10)\approx\mathbf{3,30}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{89}{27}=3+\frac{8}{27}\approx\mathbf{3,30}$$

Rozwiązanie:
Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{5x^4}{3\cdot\left(x^5-5\right)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{20x^3}{3\cdot\left(x^5-5\right)^{2/3}}-\frac{50x^8}{9\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}=\frac{60x^3\cdot\left(x^5-5\right)}{9\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}-\frac{50x^8}{9\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}=$$

$$\frac{60x^8-300x^3-50x^8}{9\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}=\frac{10x^8-300x^3}{9\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}=\frac{10x^3\cdot\left(x^5-30\right)}{9\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}>0$$

dla $x>\sqrt[5]{30}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\left[\sqrt[5]{30},\,\infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[5]{32},\,\infty\right)=[2,\,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>2$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=2$. Ponieważ $f(2)=3$ oraz $f'(2)=80/27$, dla $x>2$ zachodzi nierówność

$$f(x)>3+\frac{80\cdot(x-2)}{27}$$

i w konsekwencji

$$f(2,1)>3+\frac{80\cdot 0,1}{27}=3+\frac{8}{27}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(2,1)$ jest większa od $89/27$.

Zadanie **24.** **(zadanie dodatkowe)**

Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f''(x)\geqslant 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{(x-y)^2}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję pomocniczą $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}\,.$$

Wówczas dla każdej liczby rzeczywistej x otrzymujemy

$$g''(x)=f''(x)-1\geqslant 1-1=0\,,$$

skąd wynika, że g jest funkcją wypukłą. Wobec tego dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{g(x)+g(y)}{2}\geqslant g\left(\frac{x+y}{2}\right)\,,$$

co po wykorzystaniu definicji funkcji g daje kolejno:

$$\frac{f(x)-\frac{x^2}{2}+f(y)-\frac{y^2}{2}}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}{2}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{x^2+y^2}{4}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{(x+y)^2}{8}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{x^2+y^2}{4}-\frac{x^2+2xy+y^2}{8}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{2x^2+2y^2}{8}-\frac{x^2+2xy+y^2}{8}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{x^2-2xy+y^2}{8}\,,$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{(x-y)^2}{8}\,,$$

co należało dowieść.

Zadanie **25. (zadanie dodatkowe)**

Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych różnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{|x-y|}\,.$$

Udowodnić, że funkcja f jest stała.

Rozwiązanie:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y oraz dowolnej liczby naturalnej $n>\max(x,y)$, po wykorzystaniu założeń o funkcji f oraz nierówności trójkąta, otrzymujemy:

$$|f(x)-f(y)|=|f(x)-f(n)+f(n)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(n)|+|f(n)-f(y)|\leqslant\frac{1}{n-x}+\frac{1}{n-y}\,.$$

Po ustaleniu x, y i przejściu z n do $+\infty$ otrzymana przed chwilą nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{n-x}+\frac{1}{n-y}$$

prowadzi do

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 0\,,$$

wobec czego

$$|f(x)-f(y)|=0$$

i w konsekwencji f jest funkcją stałą.

Zadanie **26.** **(zadanie dodatkowe)**

Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{kx+1}}{2}$$

na przedziale $[-1/k,\, b]$ była odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest fragment krzywej o równaniu

$$y=x+\frac{1-\sqrt{kx+1}}{2}\,,$$

czyli

$$y-x-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{kx+1}}{2}\,,$$

a to z kolei jest fragmentem krzywej o równaniu

$$y-x-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{kx+1}}{2}\,.$$

Obustronne podniesienie do kwadratu powyższego równania prowadzi do

$$y^2+x^2+\frac{1}{4}-xy-y+x=\frac{kx}{4}+\frac{1}{4}\,,$$

czyli

$$y^2+x^2-xy-y+x\cdot\left(1-\frac{k}{4}\right)=0\,.$$

Powyższe równanie będzie symetryczne ze względu na zamianę x i y, jeżeli współczynnik przy x będzie taki sam jak przy y, co prowadzi do warunku

$$1-\frac{k}{4}=-1$$

spełnionego dla $k=8$.

Wobec tego podejrzewamy, że w zadaniu chodzi o funkcję określoną wzorem

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{8x+1}}{2}\,.$$

Pozostaje wyznaczyć przedział, na którym jest ona odwrotna do samej siebie i to precyzyjnie uzasadnić – na razie wiemy tylko, że wykres funkcji f jest jakimś fragmentem pewnej krzywej symetrycznej względem prostej o równaniu $y=x$.

Na krzywą określoną równaniem

$$y^2+x^2-xy-y-x=0$$

składają się wykresy dwóch funkcji $f,g:[-1/8,\,\infty)\to\mathbb{R}$ określonych wzorami

$$f(x)=x+\frac{1-\sqrt{8x+1}}{2}$$

oraz

$$g(x)=x+\frac{1+\sqrt{8x+1}}{2}\,.$$

Zauważmy, że

$$f\left(-\frac{1}{8}\right)=g\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8} \qquad \text{oraz} \qquad f\left(\frac{3}{8}\right)=-\frac{1}{8}\,.$$

Ponadto funkcja g jest rosnąca (a więc przyjmuje wartości $\geqslant 3/8$), natomiast wobec

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{8x+1}}\begin{cases} <0 & \text{dla} \quad x<3/8 \\ >0 & \text{dla} \quad x>3/8 \end{cases}$$

wnioskujemy, że funkcja f jest malejąca na przedziale $[-1/8,\,3/8]$ i przekształca ten przedział na siebie.

Zatem wykres funkcji f ograniczonej do przedziału $[-1/8,\,3/8]$ jest określony warunkami

$$y^2+x^2-xy-y-x=0, \qquad x,y\leqslant 3/8\,,$$

a zatem jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=8$ i $b=3/8$.

Uwaga: Zauważmy, że krzywą o równaniu

$$y^2+x^2-xy-y-x=0$$

możemy podzielić na 3 części:

• wykres funkcji g na przedziale $(-1/8,\infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $y>3/8$,

• wykres funkcji f na przedziale $(3/8,\infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $x>3/8$,

• wykres funkcji f na przedziale $[-1/8,\,3/8]$ – składa się ze wszystkich punktów krzywej spełniających warunek $x,y\leqslant 3/8$.