ANALIZA 1, KOLOKWIUM nr 5, 10.01.2023, godz. 10:15–11:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **9.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-10\cdot|x+1|$$

na przedziale $[-9, 11]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Zadanie **10.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-\sin x-\cos x-x^2}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Zadanie **11.** **(10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(x^2+100\right).$$

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{10}.$$

Zadanie **12.** **(10 punktów)**

Funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$ określonej wzorem

$$f(x)=x^x.$$

Rozstrzygnąć, czy pochodna $g'(27)$ jest mniejsza czy większa od $1/50$.

Zadanie **21. (zadanie dodatkowe)**

Liczby wymierne dodatnie a i b spełniają warunek $a^b = 2$. Dowieść, że liczby a i $1/b$ są całkowite.

Zadanie **22. (zadanie dodatkowe)**

Dana jest taka funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt[7]{(x-y)^8}\,.$$

Udowodnić, że funkcja f jest stała.

Zadanie **23. (zadanie dodatkowe)**

Funkcja $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ e & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

Obliczyć $f'(0)$ przyjmując bez dowodu, że f jest ciągła.