KOLOKWIUM nr 5, 10.01.2023, godz. 10:15–11:45

Zadanie **9.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-10\cdot|x+1|$$

na przedziale $[-9, 11]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x\in[-1, +\infty) \\ -x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty, -1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-10x-10 & \text{dla} \quad x\in[-1, 11] \\ x^2+10x+10 & \text{dla} \quad x\in[-9, -1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-9, 11]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-10 & \text{dla} \quad x\in(-1, 11) \\ 2x+10 & \text{dla} \quad x\in(-9, -1) \end{cases}$$

W punkcie -1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1, 11)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-10=0$, co ma rozwiązanie $x=5$, które należy do rozważanego przedziału $(-1, 11)$.

2° W przypadku $x\in(-9, -1)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+10=0$, co ma rozwiązanie $x=-5$, które należy do rozważanego przedziału $(-9, -1)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -9 i 11,
- miejsca zerowe pochodnej: -5 i 5,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -1.

$$f(-9)=1\,,$$

$$f(-5)=-15\,,$$

$$f(-1)=1\,,$$

$$f(5)=-35\,,$$

$$f(11)=1\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -35 w punkcie 5, a wartość największą równą 1 w punktach -9, -1 oraz 11.

Zadanie **10.** **(10 punktów)**
Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-\sin x-\cos x-x^2}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.
Rozwiązanie:
Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-\sin h-\cos h-h^2}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\sin h-\cos h-h^2-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\cos h+\sin h-2h-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h+\sin h+\cos h-2-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h+\cos h-\sin h-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\sin x-\cos x}{24}=0\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1/3$ i wówczas $f'(0)=0$.

Zadanie **11.** **(10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(x^2+100\right).$$

Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{10}.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{10},$$

czyli

$$\left|\frac{2x}{x^2+100}\right|\leqslant\frac{1}{10}. \qquad (\spadesuit)$$

Nierówność ($\spadesuit$) można udowodnić różnymi sposobami.

Sposób I:

Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy:

$$\left|\frac{2x}{x^2+100}\right|=\frac{1}{10}\cdot\left|\frac{20x}{x^2+100}\right|=\frac{1}{10}\cdot\frac{\sqrt{x^2\cdot100}}{\frac{x^2+100}{2}}\leqslant\frac{1}{10},$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II:

Przekształcając nierówność ($\spadesuit$) otrzymujemy kolejno nierówności równoważne:

$$20|x|\leqslant x^2+100,$$

$$0\leqslant x^2-20|x|+100,$$

$$0\leqslant(|x|-10)^2,$$

co jest oczywiście prawdziwe, bo kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Sposób III:

Oznaczając

$$g(x)=\frac{2x}{x^2+100}$$

stwierdzamy, że

$$g'(x)=\frac{2\cdot(x^2+100)-4x^2}{\left(x^2+100\right)^2}=\frac{2\cdot(100-x^2)}{\left(x^2+100\right)^2}.$$

Stąd wynika, że $g'(\pm10)=0$, a ponadto $g'(x)<0$, gdy $|x|>10$ oraz $g'(x)>0$, gdy $|x|<10$.

Wobec tego funkcja g jest ujemna i malejąca na przedziale $(-\infty,\,-10]$, rosnąca na przedziale $[-10,\,10]$ oraz dodatnia i malejąca na przedziale $[10,\,\infty)$. W konsekwencji przyjmuje ona w punkcie -10 wartość najmniejszą, a w punkcie 10 wartość największą. Ponieważ $g(\pm10)=\pm1/10$, nierówność ($\spadesuit$) jest udowodniona.

Zadanie **12.** **(10 punktów)**

Funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$ określonej wzorem

$$f(x)=x^x\,.$$

Rozstrzygnąć, czy pochodna $g'(27)$ jest mniejsza czy większa od $1/50$.

Rozwiązanie:

Najpierw obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}x^x=\frac{d}{dx}e^{\ln x^x}=\frac{d}{dx}e^{x\cdot\ln x}=e^{x\cdot\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(x\cdot\ln x)=e^{x\cdot\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x\cdot(\ln x+1)\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy:

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}\,,$$

czyli

$$g'\left(x^x\right)=\frac{1}{x^x\cdot(\ln x+1)}\,.$$

Przyjmując w powyższym wzore $x=3$ dostajemy

$$g'(27)=\frac{1}{27\cdot(\ln 3+1)}<\frac{1}{25\cdot(\ln e+1)}=\frac{1}{25\cdot 2}=\frac{1}{50}\,.$$

Odpowiedź: Liczba $g'(27)$ jest mniejsza od $1/50$.

Zadanie **21. (zadanie dodatkowe)**

Liczby wymierne dodatnie a i b spełniają warunek $a^b=2$. Dowieść, że liczby a i $1/b$ są całkowite.

Rozwiązanie:

Zapiszmy liczby a i b w postaci ułamków nieskracalnych o naturalnym liczniku i mianowniku:

$$a=\frac{m}{n}\,, \qquad b=\frac{s}{t}\,.$$

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{s/t}=2\,,$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{s}=2^t\,,$$

$$m^s=2^t\cdot n^s\,. \qquad (\heartsuit)$$

Dowód całkowitości liczby $\mathbf{a}$*, czyli równości* $\mathbf{n=1}$ *(dowód nie wprost):*

Jeżeli liczba n jest większa od 1, to ma dzielnik pierwszy, oznaczmy go przez p. Wówczas prawa strona równości $(\heartsuit)$ jest podzielna przez p, a zatem lewa strona też jest podzielna przez p. Skoro jednak liczba m^s jest podzielna przez liczbę pierwszą p, to także m jest podzielne przez p, co przeczy założeniu, że liczby m i n są względnie pierwsze.

Dowód całkowitości liczby $\mathbf{1/b}$*:*

Skoro wiemy już, że $n=1$, równanie $(\heartsuit)$ przyjmuje postać

$$m^s=2^t\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Stąd wynika, że m jest potęgą dwójki o wykładniku naturalnym, powiedzmy $m=2^k$, co po podstawieniu do równania $(\diamondsuit)$ daje

$$2^{ks}=2^t\,.$$

Wobec tego $ks=t$, skąd $k=t/s=1/b$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie **22.** **(zadanie dodatkowe)**

Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\sqrt[7]{(x-y)^8}\,.$$

Udowodnić, że funkcja f jest stała.

Rozwiązanie:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x<y$ oraz dowolnej liczby naturalnej n oznaczmy

$$x_i=x+i\cdot\frac{y-x}{n}$$

dla $i=0,1,2,3,\ldots n$. Odnotujmy, że przy tych oznaczeniach $x_0=x$, $x_n=y$, a ponadto $x_i-x_{i-1}=(y-x)/n$. Tak więc punkty x_i dzielą przedział $[x,\,y]$ na n przedziałów równej długości.

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z założeń o funkcji f otrzymujemy:

$$|f(x)-f(y)|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt[7]{\left(x_i-x_{i-1}\right)^8}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[7]{(y-x)^8}}{\sqrt[7]{n^8}}=n\cdot\frac{\sqrt[7]{(y-x)^8}}{\sqrt[7]{n^8}}=\frac{\sqrt[7]{(y-x)^8}}{\sqrt[7]{n}}\,.$$

Udowodniliśmy więc, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x<y$ oraz dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{\sqrt[7]{(y-x)^8}}{\sqrt[7]{n}}\,,$$

co po ustaleniu x, y i przejściu z n do $+\infty$ daje

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 0\,,$$

wobec czego

$$|f(x)-f(y)|=0$$

i w konsekwencji f jest funkcją stałą.

Zadanie **23. (zadanie dodatkowe)**

Funkcja $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ jest zdefiniowana wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{1/x} & \text{dla}\quad x\neq 0\\ e & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$

Obliczyć $f'(0)$ przyjmując bez dowodu, że f jest ciągła.

Rozwiązanie:

Skoro f jest ciągła, to

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x)\,,$$

o ile granica po prawej stronie istnieje.

Wobec tego

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(1+x)^{1/x}=(1+x)^{1/x}\frac{d}{dx}\ln(1+x)^{1/x}=(1+x)^{1/x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)\right)=$$

$$=f(x)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\cdot\ln(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\right)\overset{x\to 0}{\to}f(0)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{x^2}\cdot\ln(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\right)=$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{x^2}\cdot\ln(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\right)$$

oraz

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{x^2}\cdot\ln(1+x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-(1+x)\cdot\ln(1+x)+x}{x^2\cdot(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1+x)\cdot\ln(1+x)+x}{x^2+x^3}\overset{\text{d'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)-(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}+1}{2x+3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{2x+3x^2}\overset{\text{d'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x}=-\frac{1}{2}\,.$$

Odpowiedź: $f'(0)=-e/2$.