KOLOKWIUM nr 3, 6.12.2022, godz. 10:15–11:45

Zadanie **5. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\ldots+\frac{k}{n^2+k}+\ldots+\frac{An+A-2}{(n+B)^2-2}+\frac{An+A-1}{(n+B)^2-1}+\frac{An+A}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich A i B, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{An+A}{(n+B)^2}=\frac{An+A}{n^2+2Bn+B^2},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=1}^{N(n)}\frac{k}{n^2+k}, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n)=An+A=2Bn+B^2, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe (zauważmy, że są one całkowite).

Aby prawa równość (2) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} A &= 2B \\ A &= B^2 \end{cases}$$

Wobec dodatniości liczb A i B otrzymujemy $B=2$ i $A=4$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n)=4n+4.$$

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie zachowując liczniki i szacując mianowniki:

$$\sum_{k=1}^{4n+4}\frac{k}{n^2+4n+4} \leqslant \sum_{k=1}^{4n+4}\frac{k}{n^2+k} \leqslant \sum_{k=1}^{4n+4}\frac{k}{n^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$, korzystając przy tym z obliczonej sumy postępu arytmetycznego:.

$$\sum_{k=1}^{4n+4}k=(2n+2)\cdot(4n+5).$$

Otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{4n+4}\frac{k}{n^2+4n+4}=\frac{(2n+2)\cdot(4n+5)}{n^2+4n+4}\to 8$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{4n+4}\frac{k}{n^2}=\frac{(2n+2)\cdot(4n+5)}{n^2}\to 8.$$

Widzimy, że oszacowania dolne i górne dążą do tej samej granicy równej 8. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 8.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=4$, $B=2$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 8.

Zadanie **6. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}\,.$$
Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru na różnicę sześcianów, który przy założeniu niezrowości poniższego mianownika można zapisać w postaci
$$a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\,.$$
Przyjmując $a=\sqrt[3]{x^3+1}\geqslant1$ oraz $b=\sqrt[3]{y^3+1}\geqslant1$, zauważamy, że $a^2+ab+b^2\geqslant3>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{y^3+1}\right|=$$
$$=\left|\frac{(x^3+1)-(y^3+1)}{(x^3+1)^{2/3}+(x^3+1)^{1/3}\cdot(y^3+1)^{1/3}+(y^3+1)^{2/3}}\right|=$$
$$=\frac{|x^3-y^3|}{(x^3+1)^{2/3}+(x^3+1)^{1/3}\cdot(y^3+1)^{1/3}+(y^3+1)^{2/3}}=$$
$$=\frac{|x-y|\cdot(x^2+xy+y^2)}{(x^3+1)^{2/3}+(x^3+1)^{1/3}\cdot(y^3+1)^{1/3}+(y^3+1)^{2/3}}=$$
$$=|x-y|\cdot\frac{x^2+xy+y^2}{(x^3+1)^{2/3}+(x^3+1)^{1/3}\cdot(y^3+1)^{1/3}+(y^3+1)^{2/3}}\leqslant|x-y|\,,$$
gdyż na podstawie nierówności
$$x<\left(x^3+1\right)^{1/3}$$
oraz
$$y<\left(y^3+1\right)^{1/3}$$
widzimy, że w wyrażeniu
$$\frac{x^2+xy+y^2}{(x^3+1)^{2/3}+(x^3+1)^{1/3}\cdot(y^3+1)^{1/3}+(y^3+1)^{2/3}}\ <\ 1$$
licznik jest mniejszy od mianownika (a przy tym wobec nieujemności liczb x i y licznik jest nieujemny, a mianownik dodatni).

Zadanie **7. (10 punktów)**
Wyznaczyć dziedzinę oraz asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt[8]{x^8+x^7}\,.$$

Rozwiązanie:
Zauważmy, że nierówność

$$x^8+x^7=x^7\cdot(x+1)\geqslant 0$$

jest spełniona dla $x\in(-\infty,-1]\cup[0,\infty)$ i taka jest dziedzina funkcji f. Ponieważ funkcja f jest ciągła, a jej dziedzina jest zbiorem domkniętym[1], nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych o równaniu $y=ax+b$.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7}{x^8}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+x^7}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^8+x^7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{8}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^8-t^8}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[8]{x^8}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7}}{-\sqrt[8]{x^8}}\right)=$$

[1] Czyli zawierającym swoje punkty skupienia. Zbiorami domkniętymi są na przykład sumy skończenie wielu przedziałów postaci $[c,d]$, $(-\infty,d]$, $[c,\infty)$.

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7}{x^8}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}}\right)=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+x^7}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^8+x^7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7}}{x^2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7}}{x^4}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7}}{-\sqrt[8]{x^8}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7}}{\sqrt[4]{x^8}}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7}}{\sqrt{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}}-1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{8}\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^8-t^8}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}$$

przy $s=\sqrt[8]{x^8+x^7}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+\frac{1}{8}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-\frac{1}{8}$.

Zadanie **8. (10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste parametru a, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=ax+\sqrt{x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f(0)=1$ oraz $f(1)=a+\sqrt{2}$, funkcja f ma szansę być odwrotną do samej siebie tylko wtedy, gdy

$$0=f(f(0))=a+\sqrt{2}\,,$$

czyli tylko dla $a=-\sqrt{2}$.

Wykażemy, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=-\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{x^2+1}$$

jest odwrotna do samej siebie.

Wykres funkcji f jest krzywą[2] o równaniu

$$y=-\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{x^2+1}\,,$$

czyli

$$y+\sqrt{2}\cdot x=\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (\heartsuit)$$

Z powyższego równania wynika

$$y+x=\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x\geqslant\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|>\sqrt{x^2}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=$$
$$=|x|-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot|x|\geqslant 0\,,$$

natomiast z podobnego równania

$$y+\sqrt{2}\cdot x=-\sqrt{x^2+1} \qquad (\diamondsuit)$$

dochodzimy do

$$y+x=-\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x\leqslant-\sqrt{x^2+1}+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|<-\sqrt{x^2}+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=$$
$$=-|x|+\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot|x|=\left(\sqrt{2}-2\right)\cdot|x|\leqslant 0\,.$$

Podsumujmy:

$$y+\sqrt{2}\cdot x=\sqrt{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad x+y>0$$

oraz

$$y+\sqrt{2}\cdot x=-\sqrt{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad x+y<0\,,$$

a więc w równaniu

$$y+\sqrt{2}\cdot x=\pm\sqrt{x^2+1}$$

znak "$\pm$" jest taki sam jak znak liczby $x+y$.

[2] Z uzyskanej w dalszej części rozwiązania postaci równania tej krzywej można stwierdzić, że krzywa ta jest hiperbolą. A dokładniej jest jedną gałęzią hiperboli, podczas gdy druga gałąź jest opisywana przez równanie ($\diamondsuit$).

Idea powyższych oszacowań jest następująca: W wyrażeniu

$$\pm\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x\,,$$

które jest równe sumie $x+y$, pierwszy składnik ma większą wartość bezwzględną niż drugi, a więc znak całego wyrażenia (czyli znak $x+y$) będzie taki sam jak znak pierwszego składnika, czyli jak znak "$\pm$".

Zatem równanie ($\heartsuit$) wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$, gdyż nierówność ta wymusza, aby pierwiastek był ze znakiem plus, a nie minus.

Otrzymujemy kolejno

$$y^2+2\sqrt{2}\cdot xy+2x^2=x^2+1, \qquad x+y>0$$
$$y^2+2\sqrt{2}\cdot xy+x^2=1, \qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.

Odpowiedź: Jedyną wartością parametru spełniającą warunki zadania jest $a=-\sqrt{2}$.