KOLOKWIUM nr 1, 25.10.2022, godz. 10:15–11:45

Zadanie **1. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{82}\cdot n\leqslant 3^n+3^{86}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 81$.

Dla $n\leqslant 81$ zachodzą nierówności

$$3^{82}\cdot n\leqslant 3^{82}\cdot 81=3^{82}\cdot 3^4=3^{86}<3^n+3^{86}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 82$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=82$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=3^{82}\cdot 82\,,$$

$$P=3^{82}+3^{86}=3^{82}+81\cdot 3^{82}=82\cdot 3^{82}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 82$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$3^{82}\cdot n\leqslant 3^n+3^{86}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$3^{82}\cdot (n+1)\leqslant 3^{n+1}+3^{86}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 82$ otrzymujemy

$$L=3^{82}\cdot(n+1)=3^{82}\cdot n+3^{82}\leqslant 3^n+3^{86}+3^{82}\leqslant 3^n+3^{86}+3^n=2\cdot 3^n+3^{86}<$$

$$<3\cdot 3^n+3^{86}=3^{n+1}+3^{86}=P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **2. (10 punktów)**

Dowieść, że liczba

$$\log_{(10/3)}\left(\frac{10}{9}\right)$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(10/3)}\left(\frac{10}{9}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych **(zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(10/3)}\left(\frac{10}{9}\right)=\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{10}{3}\right)^{m/n}=\frac{10}{9}\,,$$

$$\left(\frac{10}{3}\right)^{m}=\left(\frac{10}{9}\right)^{n}\,,$$

$$10^m\cdot 9^n=10^n\cdot 3^m\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^m\cdot 3^{2n}\cdot 5^m=2^n\cdot 3^m\cdot 5^n\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} m&=&n\\ 2n&=&m\\ m&=&n \end{array}\right.$$

Rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że $2n=m=n$, skąd istnieje jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$, które nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(10/3)}\left(\frac{10}{9}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(10/3)}\left(\frac{10}{9}\right)$ jest niewymierna.

Zadanie **3. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n}{n} < \left(\frac{27}{4}\right)^n .$$

Rozwiązanie:

Sposób I (standardowe rzemiosło):

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{3}{1}=3$$

oraz

$$P=\left(\frac{27}{4}\right)^1=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4} .$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $3<6\frac{3}{4}$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{3n}{n} < \left(\frac{27}{4}\right)^n . \tag{$\clubsuit$}$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{3n+3}{n+1} < \left(\frac{27}{4}\right)^{n+1} . \tag{$\diamondsuit$}$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności ($\clubsuit$) można zapisać jako

$$\binom{3n}{n}=\frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!} .$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L=\binom{3n+3}{n+1}=\frac{(3n+3)!}{(n+1)!\cdot(2n+2)!}=\frac{(3n)!}{n!\cdot(2n)!}\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{27}{4}\right)^n\cdot\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}\leqslant\left(\frac{27}{4}\right)^n\cdot\frac{27}{4}=\left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}=P ,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}\leqslant\frac{27}{4} . \tag{$\heartsuit$}$$

Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$4\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\leqslant 27\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2) ,$$

$$4\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot 3\leqslant 27\cdot(2n+1)\cdot(n+1)\cdot 2 ,$$

$$2\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\leqslant 9\cdot(2n+1)\cdot(n+1)\,,$$
$$2\cdot\left(9n^2+9n+2\right)\leqslant 9\cdot\left(2n^2+3n+1\right)\,,$$
$$18n^2+18n+4\leqslant 18n^2+27n+9\,,$$
$$0\leqslant 9n+5\,,$$

a zatem nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

Sposób II (trochę sprytu dla uniknięcia uciążliwych rachunków):

Postępujemy jak w sposobie I, przy czym nierówność ($\heartsuit$) zapisujemy w postaci

$$\frac{\left(n+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(n+\frac{2}{3}\right)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot(n+1)}\leqslant 1\,.$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa, gdyż czynniki w liczniku są mniejsze od odpowiednich czynników w mianowniku, a poruszamy się w świecie liczb dodatnich.

Sposób III (czysty spryt zamiast indukcji):

Ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy

$$27^n=3^{3n}=(2+1)^{3n}=\sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}\cdot 2^{3n-k}>\binom{3n}{n}\cdot 2^{3n-n}=\binom{3n}{n}\cdot 4^n\,.$$

Nierówność powyżej wynika z faktu, że suma liczb dodatnich jest większa od każdego składnika, w tym wypadku składnika odpowiadającego $k=n$.

Otrzymaliśmy więc nierówność

$$27^n>\binom{3n}{n}\cdot 4^n\,,$$

która jest równoważna nierówności podanej w treści zadania.

Zadanie **4. (10 punktów)**

Podać dwa przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x \neq 1$, dla których liczba

$$\log_x \left(x+\sqrt{5}\right)$$

jest wymierna.

W podanych przykładach liczbę x należy wyrazić wzorem, w którym można używać liczb całkowitych, czterech działań oraz pierwiastkowania (dowolnego stopnia, ale wystarczą pierwiastki kwadratowe).

W każdym z przykładów należy podać wartość $\log_x \left(x+\sqrt{5}\right)$.

Rozwiązanie:

Przykład I:

Zakładając, że

$$\log_x \left(x+\sqrt{5}\right)=w\,,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w=x+\sqrt{5}\,. \tag{\#}$$

Wybieramy taką wartość wymierną w, abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać

$$x^2=x+\sqrt{5}\,.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe[1] otrzymując

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}\,,$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x \left(x+\sqrt{5}\right)=\log_x x^2=2$$

jest liczbą wymierną.

Przykład II:

Postępujemy jak w przykładzie I przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1}=x+\sqrt{5}$$

mającego[2] rozwiązanie dodatnie

$$x=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Wówczas

$$\log_x \left(x+\sqrt{5}\right)=\log_x x^{-1}=-1$$

jest liczbą wymierną.

[1] Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

[2] Standardowe rachunki polegające na rozwiązaniu równania kwadratowego są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.