Egzamin, 20.02.2023, godz. 9:00–12:50

Zadanie **7** **(ZADANIE SPECJALNE)**

Niech f będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=\frac{3x-2}{x^3-4x}\,.$$
Obliczyć $f^{(2022)}(1)$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję f na sumę ułamków prostych:
$$\frac{3x-2}{x^3-4x}=\frac{3x-2}{(x-2)\cdot x\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+2}$$
$$3x-2=A\cdot x\cdot(x+2)+B\cdot(x-2)\cdot(x+2)+C\cdot(x-2)\cdot x$$
Podstawiając w powyższej równości kolejno $x=2$, $x=0$ i $x=-2$ otrzymujemy odpowiednio $A=1/2$, $B=1/2$, $C=-1$. Wobec tego
$$f(x)=\frac{1/2}{x-2}+\frac{1/2}{x}-\frac{1}{x+2}\,.$$
Po 2022-krotnym zróżniczkowaniu otrzymujemy
$$f^{(2022)}(x)=2022!\cdot\left(\frac{1/2}{(x-2)^{2023}}+\frac{1/2}{x^{2023}}-\frac{1}{(x+2)^{2023}}\right),$$
skąd
$$f^{(2022)}(1)=2022!\cdot\left(\frac{1/2}{(-1)^{2023}}+\frac{1/2}{1^{2023}}-\frac{1}{3^{2023}}\right)=-\frac{2022!}{3^{2023}}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f^{(2022)}(1)$ jest równa $-2022!/3^{2023}$.

Zadanie **8 (ZADANIE SPECJALNE)**

Dobrać takie wartości parametrów rzeczywistych dodatnich k i b, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=x+1-\sqrt{kx+1}$$

na przedziale $[-1/k, b]$ była odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest fragment krzywej o równaniu

$$y=x+1-\sqrt{kx+1}\,,$$

czyli

$$y-x-1=-\sqrt{kx+1}\,,$$

a to z kolei jest fragmentem krzywej o równaniu

$$y-x-1=\pm\sqrt{kx+1}\,.$$

Obustronne podniesienie do kwadratu powyższego równania prowadzi do

$$y^2+x^2+1-2xy-2y+2x=kx+1\,,$$

czyli

$$y^2+x^2-2xy-2y+x\cdot(2-k)=0\,.$$

Powyższe równanie będzie symetryczne ze względu na zamianę x i y, jeżeli współczynnik przy x będzie taki sam jak przy y, co prowadzi do warunku

$$2-k=-2$$

spełnionego dla $k=4$.

Wobec tego podejrzewamy, że w zadaniu chodzi o funkcję określoną wzorem

$$f(x)=x+\sqrt{4x+1}\,.$$

Pozostaje wyznaczyć przedział, na którym jest ona odwrotna do samej siebie i to precyzyjnie uzasadnić – na razie wiemy tylko, że wykres funkcji f jest jakimś fragmentem pewnej krzywej symetrycznej względem prostej o równaniu $y=x$.

Na krzywą określoną równaniem

$$y^2+x^2-2xy-2y-2x=0$$

składają się wykresy dwóch funkcji $f,g:[-1/4,\infty)\to\mathbb{R}$ określonych wzorami

$$f(x)=x+1-\sqrt{4x+1}$$

oraz

$$g(x)=x+1+\sqrt{4x+1}\,.$$

Zauważmy, że

$$f\left(-\frac{1}{4}\right)=g\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\qquad\text{oraz}\qquad f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{4}\,.$$

Ponadto funkcja g jest rosnąca (a więc przyjmuje wartości $\geqslant 3/8$), natomiast wobec

$$f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{4x+1}}\begin{cases}<0 & \text{dla} \quad x<3/4\\ >0 & \text{dla} \quad x>3/4\end{cases}$$

wnioskujemy, że funkcja f jest malejąca na przedziale $[-1/4, 3/4]$ i przekształca ten przedział na siebie.

Zatem wykres funkcji f ograniczonej do przedziału $[-1/4, 3/4]$ jest określony warunkami

$$y^2+x^2-2xy-2y-2x=0, \qquad x,y \leqslant 3/4\,,$$

a zatem jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=4$ i $b=3/4$.

Uwaga: Zauważmy, że krzywą o równaniu

$$y^2+x^2-2xy-2y-2x=0$$

możemy podzielić na 3 części:

• wykres funkcji g na przedziale $(-1/4, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $y>3/4$,

• wykres funkcji f na przedziale $(3/4, \infty)$ – wszystkie punkty na tym wykresie spełniają warunek $x>3/4$,

• wykres funkcji f na przedziale $[-1/4, 3/4]$ – składa się ze wszystkich punktów krzywej spełniających warunek $x,y \leqslant 3/4$.

Zadanie **9** **(ZADANIE SPECJALNE)**

Niech

$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(4{,}08)\approx \mathbf{2{,}36}$$

jest mniejsza czy większa od

$$f(4)+0{,}027\approx \mathbf{2{,}36}$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{3x^2}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{6x}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{30x\cdot\left(x^3+5\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=$$

$$\frac{30x^4+150x-36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{150x-6x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{6x\cdot\left(25-x^3\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}<0$$

dla $x>\sqrt[3]{25}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{25},\infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[3]{27},\infty\right)=[3,\infty)$, a funkcja f' jest w tym przedziale malejąca.

Zatem wykres funkcji f dla $x>4$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=4$. Ponieważ $f'(4)<f'(3)=27/80$, dla $x>4$ zachodzą nierówności

$$f(x)<f(4)+f'(4)\cdot(x-4)<f(4)+\frac{27\cdot(x-4)}{80}$$

i w konsekwencji

$$f(4{,}08)<f(4)+\frac{27\cdot 0{,}080}{80}=f(4)+0{,}027\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(4{,}08)$ jest mniejsza od $f(4)+0{,}027$.

Zadanie **10** **(ZADANIE SPECJALNE)**

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej $x\in(0,2)$ spełniającej nierówność
$$x^{2023}\cdot(x-2)^{2024}>1\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem
$$f(x)=x^{2023}\cdot(x-2)^{2024}\,.$$
Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem
$$f'(x)=2023\cdot x^{2022}\cdot(x-2)^{2024}+2024\cdot x^{2023}\cdot(x-2)^{2023}\,.$$
Ponieważ
$$f(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad f'(1)=2023-2024=-1\neq 0\,,$$
funkcja f osiąga w punkcie 1 wartość 1, która nie jest ekstremum lokalnym (bo $f'(1)\neq 0$). W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu jedynki także wartość większą od 1.