Egzamin, 24.02.2023

Zadanie **1** **(10 punktów)**

Dowieść, że liczba

$$\log_{(7/100)}\left(\frac{10}{7}\right)$$

jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(7/100)}\left(\frac{10}{7}\right)$ jest wymierna i niech będzie ona równa $-m/n$, gdzie m, n są liczbami naturalnymi **(zauważmy, że jest to liczba ujemna, bo podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, a liczba logarytmowana jest większa od 1).** Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(7/100)}\left(\frac{10}{7}\right)=-\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{7}{100}\right)^{-m/n}=\frac{10}{7}\,,$$

$$\left(\frac{7}{100}\right)^{-m}=\left(\frac{10}{7}\right)^{n}\,,$$

$$\left(\frac{100}{7}\right)^{m}=\left(\frac{10}{7}\right)^{n}\,,$$

$$100^m\cdot 7^n=10^n\cdot 7^m\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 5^{2m}\cdot 7^n=2^n\cdot 5^n\cdot 7^m\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2m & = & n \\ 2m & = & n \\ n & = & m \end{array}\right.$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m=n=m\,,$$

co jednak prowadzi do $m=0$, a to nie jest liczba dodatnia.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(7/100)}\left(\frac{10}{7}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(7/100)}\left(\frac{10}{7}\right)$ jest niewymierna.

Uwaga: Ponieważ korzystamy z jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze liczb naturalnych, **błędne** jest każde rozwiązanie oparte na rozkładzie, w którym:

• zamiast rozkładu na czynniki pierwsze występuje rozkład z potęgami dziesiątki,
lub
• występują wykładniki, o których nie wiadomo, czy są nieujemne.

Zadanie **2** **(10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\ldots+\frac{k}{n^2+k}+\ldots+\frac{An+3A-2}{(n+B)^2-2}+\frac{An+3A-1}{(n+B)^2-1}+\frac{An+3A}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich A i B, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{An+3A}{(n+B)^2}=\frac{An+3A}{n^2+2Bn+B^2}\,,$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=1}^{N(n)}\frac{k}{n^2+k}\,, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n)=An+3A=2Bn+B^2\,, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe (zauważmy, że są one całkowite).

Aby prawa równość (2) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} A &= 2B \\ 3A &= B^2 \end{cases}$$

Wobec dodatniości liczb A i B otrzymujemy $B=6$ i $A=12$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n)=12n+36\,.$$

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie zachowując liczniki i szacując mianowniki:

$$\sum_{k=1}^{12n+36}\frac{k}{n^2+12n+36}\leqslant\sum_{k=1}^{12n+36}\frac{k}{n^2+k}\leqslant\sum_{k=1}^{12n+36}\frac{k}{n^2}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$, korzystając przy tym z obliczonej sumy postępu arytmetycznego:.

$$\sum_{k=1}^{12n+36}k=(6n+18)\cdot(12n+37)\,.$$

Otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{12n+36}\frac{k}{n^2+12n+36}=\frac{(6n+18)\cdot(12n+37)}{n^2+12n+36}\to 72$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{12n+36}\frac{k}{n^2}=\frac{(6n+18)\cdot(12n+37)}{n^2}\to 72\,.$$

Widzimy, że oszacowania dolne i górne dążą do tej samej granicy równej 72. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 72.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=12$, $B=6$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 72.

Zadanie **3 (10 punktów)**

Dla odpowiednio dobranej liczby wymiernej dodatniej C udowodnić nierówności

$$C < \operatorname{arctg} 17 - \operatorname{arctg} 12 < 2\cdot C\,.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

i

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} 17 - \operatorname{arctg} 12 = f'(c)\cdot(17-12) = \frac{5}{c^2+1}$$

dla pewnego $c \in (12,17)$. Wobec tego

$$\frac{5}{17^2+1} < \operatorname{arctg} 17 - \operatorname{arctg} 12 < \frac{5}{12^2+1}\,,$$

czyli

$$\frac{5}{290} < \operatorname{arctg} 17 - \operatorname{arctg} 12 < \frac{5}{145}\,,$$

$$\frac{1}{58} < \operatorname{arctg} 17 - \operatorname{arctg} 12 < \frac{1}{29}\,,$$

co dowodzi danych w zadaniu nierówności z $C = 1/58$.

Zadanie **4 (10 punktów)**

Niech $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=\sqrt{x}-3\cdot\ln x\,.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(149)+f(151)\approx -5,5689 \qquad \text{czy} \qquad 2\cdot f(150)\approx -5,5689\ ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy kolejno

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{3}{x}\,,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{3}{x^2}=\frac{12-\sqrt{x}}{4\cdot x^2}<0 \qquad \text{dla} \qquad x>144\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[144,\infty)$.

Wobec tego

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych $x,y\geqslant 144$. W szczególności dla $x=149$ i $x=151$ otrzymujemy

$$\frac{f(149)+f(151)}{2}<f(150)\ ,$$

co po przemnożeniu przez 2 daje

$$f(149)+f(151)<2\cdot f(150)\,.$$