

Egzamin część II

Wersja testu **A** 20 lutego 2023 r.

1. Dla podanej liczby n podaj takie $x > 0$, że $\log_x(x+n) = -1$.

a) $n=4$, $x = \dots\dots\dots$ b) $n=6$, $x = \dots\dots\dots$

c) $n=8$, $x = \dots\dots\dots$ d) $n=10$, $x = \dots\dots\dots$

2. Podaj kres górny zbioru, gdzie $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

a) $\sup\left\{\frac{1}{n^2 - 10n + 47} : n \in \mathbb{N}\right\} = \dots\dots\dots$

b) $\sup\left\{\frac{1}{n^2 + 10n + 35} : n \in \mathbb{N}\right\} = \dots\dots\dots$

c) $\sup\left\{\frac{1}{n^2 - 10n + 23} : n \in \mathbb{N}\right\} = \dots\dots\dots$

d) $\sup\left\{\frac{1}{n^2 - 10n + 15} : n \in \mathbb{N}\right\} = \dots\dots\dots$

3. Podaj kres górny zbioru.

a) $\sup\left\{\frac{mn}{400m^2 + 49n^2} : m, n \in \mathbb{N}\right\} = \dots\dots\dots$

b) $\sup\left\{\frac{mn}{100m^2 + 49n^2} : m, n \in \mathbb{N}\right\} = \dots\dots\dots$

c) $\sup\left\{\frac{mn}{1600m^2 + 49n^2} : m, n \in \mathbb{N}\right\} = \dots\dots\dots$

d) $\sup\left\{\frac{mn}{900m^2 + 49n^2} : m, n \in \mathbb{N}\right\} = \dots\dots\dots$

4. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{36^n} = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25^n} = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{27^n} = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{32^n} = \dots\dots\dots$

5. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{24}{n}} - \sqrt{1 + \frac{24}{n+1}} \right) = \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{48}{n}} - \sqrt{1 + \frac{48}{n+1}} \right) = \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{25 + \frac{24}{n}} - \sqrt{25 + \frac{24}{n+1}} \right) = \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{9 + \frac{9991}{n}} - \sqrt{9 + \frac{9991}{n+1}} \right) = \dots\dots\dots$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3n+1}^{10n} \frac{k}{\sqrt{n^4 + k^2}} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{8n} \frac{k}{\sqrt{n^4 + k^2}} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{5n} \frac{k}{\sqrt{n^4 + k^2}} = \dots\dots\dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{6n} \frac{k}{\sqrt{n^4 + k^2}} = \dots\dots\dots$

7. Niech $f(x) = (7 \cdot x \cdot |x| + 1)^{2/3}$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f'(-2) = \dots\dots\dots$

b) $f'(0) = \dots\dots\dots$

c) $f'(3) = \dots\dots\dots$

d) $f'(1) = \dots\dots\dots$

8. Niech $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n)$. Podaj wartość pochodnej.

a) $f'_8(1) = \dots\dots\dots$ b) $f'_7(1) = \dots\dots\dots$

c) $f'_6(1) = \dots\dots\dots$ d) $f'_5(1) = \dots\dots\dots$

9. Niech $f_n(x) = n \cdot \sin x - \sin(nx)$. Dla podanej liczby n podaj najmniejsze takie $x > 0$, że $f'_n(x) = 0$.

a) $n = 20$, $x = \dots\dots\dots$ b) $n = 5$, $x = \dots\dots\dots$

c) $n = 2$, $x = \dots\dots\dots$ d) $n = 10$, $x = \dots\dots\dots$

10. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1 - 6x}{\ln(1 + 6x^2)} = \dots\dots\dots$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{\ln(1 + 6x^2)} = \dots\dots\dots$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\ln(1 + 6x^2)} = \dots\dots\dots$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 - 3x}{\ln(1 + 6x^2)} = \dots\dots\dots$

11. Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem $f(x) = x^5 + x + 6$. Podaj wartość pochodnej.

a) $g'(40) = \dots\dots\dots$ b) $g'(4) = \dots\dots\dots$

c) $g'(6) = \dots\dots\dots$ d) $g'(8) = \dots\dots\dots$

12. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x) = e^{x^{10}}$. Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(60)}(0) = \dots\dots\dots$ b) $f^{(70)}(0) = \dots\dots\dots$

c) $f^{(80)}(0) = \dots\dots\dots$ d) $f^{(50)}(0) = \dots\dots\dots$