Egzamin, 20.02.2023, godz. 9:00–10:30

Zadanie **1 (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+3}{n}<\frac{4^{n+1}}{3}\,.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy $L=\binom{5}{1}=5$ oraz $P=4^2/3=16/3=5\frac{1}{3}$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $5<5\frac{1}{3}$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+3}{n}<\frac{4^{n+1}}{3}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+5}{n+1}<\frac{4^{n+2}}{3}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy po wykorzystaniu założenia indukcyjnego:

$$\binom{2n+5}{n+1}=\frac{(2n+5)!}{(n+1)!(n+4)!}=\frac{(2n+3)!(2n+4)(2n+5)}{n!(n+1)(n+3)!(n+4)}=$$

$$=\binom{2n+3}{n}\cdot\frac{(2n+4)(2n+5)}{(n+1)(n+4)}<\frac{4^{n+1}}{3}\cdot\frac{(2n+4)(2n+5)}{(n+1)(n+4)}\leqslant\frac{4^{n+1}}{3}\cdot 4=\frac{4^{n+2}}{3}\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+4)(2n+5)}{(n+1)(n+4)}\leqslant 4\,. \qquad (\spadesuit)$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$(2n+4)(2n+5)\leqslant 4(n+1)(n+4)$$

$$(n+2)(2n+5)\leqslant 2(n+1)(n+4)$$

$$2n^2+9n+10\leqslant 2n^2+10n+8$$

$$2\leqslant n\,.$$

Stąd wynika, że implikację $T(n)\Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ oznacza dowodzoną nierówność, udowodniliśmy dla $n\geqslant 2$.

Wykonane wcześniej sprawdzenie dla $n=1$ okazuje się nie mieć związku z dowodem indukcyjnym, a rolę pierwszego kroku indukcyjnego przejmuje przypadek $n=2$:

1° Dla $n=2$ mamy $L=\binom{7}{2}=21$ oraz $P=4^3/3=64/3=21\frac{1}{3}$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $21<21\frac{1}{3}$, jest więc prawdziwa.

Po sprawdzeniu nierówności dla $n=2$ możemy podsumować: Indukcyjnie udowodniliśmy nierówność dla $n\geqslant 2$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$.

Uwaga:

Brak świadomości konieczności sprawdzenia przypadku $n=2$ świadczy o niezrozumieniu mechanizmu indukcji i dyskwalifikuje zadanie jako rozwiązane, a więc takie rozwiązanie musi być ocenione na **mniej niż 50% punktów, czyli co najwyżej 4 punkty.**

To samo dotyczy rozwiązania, w którym zamiast nierówności ($\spadesuit$) użyto nierówności ostrej dochodząc do warunku $n>2$ i nie podejmując próby sprawdzenia przypadku $n=3$.

Zadanie **2** **(10 punktów)**

Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x+\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+40x^3+444x^2=x^4+40x^3+400x^2+44x^2=\left(x^2+20x\right)^2+44x^2\geqslant 0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[4]{\frac{x^4+40x^3+444x^2}{x^4}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[4]{1+40x^{-1}+444x^{-2}}=2\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}-2x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+40x^3+444x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+40x^3+444x^2}+x^2\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{40x^3+444x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+40x^3+444x^2}+x^2\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{40+444x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1+40x^{-1}+444x^{-2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+40x^{-1}+444x^{-2}}+1\right)}=$$
$$=\frac{40}{(1+1)\cdot(1+1)}=10\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}1+\frac{\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[4]{\frac{x^4+40x^3+444x^2}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[4]{1+40x^{-1}+444x^{-2}}\right)=0\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+40x^3+444x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+40x^3+444x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{40x^3+444x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+40x^3+444x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{40x^{-1}+444x^{-2}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+40x^3+444x^2}}{x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{40x^{-1}+444x^{-2}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+40x^3+444x^2}}{\sqrt{x^4}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{40x^{-1}+444x^{-2}}{\left(-\sqrt[4]{1+40x^{-1}+444x^{-2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+40x^{-1}+444x^{-2}}+1\right)}=$$

$$=\frac{40}{(-1-1)\cdot(1+1)}=-10\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}$$

przy $s=\sqrt[4]{x^4+40x^3+444x^2}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=2x+10$, natomiast w $-\infty$ asymptotę poziomą o równaniu $y=-10$.

Zadanie **3** **(10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-10\cdot|x+3|$$

na przedziale $[-7,13]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x+3|=\begin{cases} x+3 & \text{dla} \quad x\in[-3,+\infty) \\ -x-3 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,-3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-10x-30 & \text{dla} \quad x\in[-3,13] \\ x^2+10x+30 & \text{dla} \quad x\in[-7,-3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-7,13]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-10 & \text{dla} \quad x\in(-3,13) \\ 2x+10 & \text{dla} \quad x\in(-7,-3) \end{cases}$$

W punkcie -3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-3,13)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x-10=0$, co ma rozwiązanie $x=5$, które należy do rozważanego przedziału $(-3,13)$.

2° W przypadku $x\in(-7,-3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+10=0$, co ma rozwiązanie $x=-5$, które należy do rozważanego przedziału $(-7,-3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -7 i 13,
- miejsca zerowe pochodnej: -5 i 5,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3.

$$f(-7)=9\,,$$
$$f(-5)=5\,,$$
$$f(-3)=9\,,$$
$$f(5)=-55\,,$$
$$f(13)=9\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -55 w punkcie 5, a wartość największą równą 9 w punktach -7, -3 oraz 13.

Zadanie **4 (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (0,1)$ zachodzi nierówność

$$2^x < x+1\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $f(x)=2^x$ oraz $g(x)=x+1$. Wówczas

$$f'(x)=2^x\cdot\ln 2$$

oraz[1]

$$f''(x)=2^x\cdot(\ln 2)^2>0$$

skąd wynika, że funkcja f jest funkcją wypukłą.

Ponieważ $f(0)=g(0)=1$ oraz $f(1)=g(1)=2$, prosta będąca wykresem funkcji liniowej g jest sieczną wykresu funkcji f wyznaczoną przez punkty odpowiadające $x=0$ i $x=1$. Odcinek tej prostej zawarty między tymi punktami jest więc cięciwą wykresu funkcji f, a skoro f jest wypukła, to leży on powyżej wykresu.

Zatem $f(x)<g(x)$ dla $x\in(0,1)$, co należało udowodnić.

[1] Można też zauważyć, że f' jest funkcją rosnącą i stąd wywnioskować wypukłość funkcji f bez liczenia jej drugiej pochodnej.

Zadanie **5 (ZADANIE DODATKOWE)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)} \,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A, B i C, że

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} + \frac{C}{2n+3} \,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)$ otrzymujemy

$$1 = A\cdot(2n+1)\cdot(2n+3) + B\cdot(2n-1)\cdot(2n+3) + C\cdot(2n-1)\cdot(2n+1) \,.$$

Dla $n=1/2$ otrzymujemy $A=1/8$, dla $n=-1/2$ otrzymujemy $B=-1/4$, natomiast przyjęcie $n=-3/2$ daje $C=1/8$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1/8}{2n-1} - \frac{1/4}{2n+1} + \frac{1/8}{2n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{9} + \frac{1}{11}\right) + \ldots\right.$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{2N-7} - \frac{2}{2N-5} + \frac{1}{2N-3}\right) + \left(\frac{1}{2N-5} - \frac{2}{2N-3} + \frac{1}{2N-1}\right) +$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2N-3} - \frac{2}{2N-1} + \frac{1}{2N+1}\right) + \left(\frac{1}{2N-1} - \frac{2}{2N+1} + \frac{1}{2N+3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+3}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $1/12$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $1/12$.

Zadanie **6 (ZADANIE DODATKOWE)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}\,.$$

Rozwiązanie:

Obliczymy granicę funkcji

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right)}\,.$$

Po podstawieniu $x=1/t$ otrzymujemy

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right)=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{\ln\left(1+t\right)}{t^2}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+t\right)-t}{t^2}=-\frac{1}{2}\,,$$

co możemy wyliczyć[2] korzystając dwukrotnie z reguły de l'Hospitala lub ze wzoru Taylora.

Odpowiedź: Dana w treści zadania granica ma wartość $1/\sqrt{e}$.

[2]Tutaj rachunki pomijamy, ale w rozwiązaniu muszą się znaleźć.