298. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność
$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|.$$

Rozwiązanie:
Z równości
$$|f(x)-f(y)|=\left|x^2-y^2\right|=(x+y)\cdot|x-y|$$
wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek
$$x+y>100.$$
Możemy więc wskazać $x=50$, $y=51$.

299. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność
$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|.$$

Rozwiązanie:
Z równości
$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{xy}\cdot|x-y|$$
wynika, że warunki zadania spełnia dowolna para **różnych** liczb rzeczywistych dodatnich x, y spełniających warunek
$$\frac{1}{xy}>100,$$
czyli
$$xy<\frac{1}{100}.$$
Możemy więc wskazać $x=1/10$, $y=1/11$.

300. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{x^2+10^8}.$$
Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność
$$|f(x)-f(y)|>0,6\cdot|x-y|.$$

Rozwiązanie:
Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów prowadzi do
$$|f(x)-f(y)|=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}.$$
Dana w treści zadania nierówność będzie spełniona, jeżeli $x\neq y$ oraz
$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+10^8}+\sqrt{y^2+10^8}}>0,6. \tag{1}$$

Dla uzyskania nierówności (1) wystarczy przyjąć, że x i y są różnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunki

$$x>0,6\cdot\sqrt{x^2+10^8} \tag{2}$$

oraz

$$y>0,6\cdot\sqrt{y^2+10^8}\,. \tag{3}$$

Przekształcanie nierówności (2) prowadzi (przy założeniu dodatniości x) do nierówności równoważnych:

$$x^2>0,6^2\cdot x^2+0,6^2\cdot 10^8\,,$$

$$0,64\cdot x^2>0,36\cdot 10^8\,,$$

$$x^2>\frac{0,36\cdot 10^8}{0,64}\,,$$

$$x^2>\frac{36\cdot 10^8}{64}\,,$$

$$x>\frac{6\cdot 10^4}{8}\,,$$

$$x>\frac{3\cdot 10^4}{4}\,,$$

$$x>7500\,.$$

Analogicznie nierówność (3) jest równoważna nierówności $y>7500$.

Dana w treści zadania nierówność jest więc prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y większych od 7500, np. dla $x=7501$ i $y=7502$.

301. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\,,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x-y|\geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)|\leqslant 50\,.$$

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika z następujących nierówności, wykorzystujących nierówność trójkąta oraz założenia o funkcji f:

$$|f(6)-f(0)|=|f(6)-f(10)+f(10)-f(0)|\leqslant|f(6)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant$$
$$\leqslant 10\cdot|6-10|+|10-0|=40+10=50\,.$$

302. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5)-f(x)|\leqslant 5 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 35\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 30\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(5)|\leqslant 10\cdot|8-5|=30\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\Big|\big(f(8)-f(5)\big)+\big(f(5)-f(0)\big)\Big|\leqslant|f(8)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 30+5=35\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(5)-f(0)|\leqslant 5\,,$$

$$|f(10)-f(5)|\leqslant 5$$

oraz

$$|f(8)-f(10)|\leqslant 10\cdot|8-10|=20\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(8)-f(0)|=\Big|\big(f(8)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(5)\big)+\big(f(5)-f(0)\big)\Big|\leqslant$$

$$\leqslant|f(8)-f(10)|+|f(10)-f(5)|+|f(5)-f(0)|\leqslant 20+5+5=30\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

303. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10)-f(x)|\leqslant 10 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 80\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 50\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

Rozwiązanie:

Wersja łatwiejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)|\leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(10)|\leqslant 10\cdot|17-10|=70\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych dwóch nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)|=\left|\big(f(17)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(0)\big)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|f(17)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant 70+10=80\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wersja trudniejsza

Na mocy założeń o funkcji f otrzymujemy nierówności

$$|f(10)-f(0)|\leqslant 10\,,$$
$$|f(20)-f(10)|\leqslant 10$$

oraz

$$|f(17)-f(20)|\leqslant 10\cdot|17-20|=30\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych trzech nierówności otrzymujemy

$$|f(17)-f(0)|=\left|\big(f(17)-f(20)\big)+\big(f(20)-f(10)\big)+\big(f(10)-f(0)\big)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|f(17)-f(20)|+|f(20)-f(10)|+|f(10)-f(0)|\leqslant 30+10+10=50\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

304. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek
$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2\,.$$
Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne liczby rzeczywiste x, y. Dla dowolnej liczby naturalnej n przyjmijmy
$$t_0=x,\quad t_1=x+\frac{y-x}{n},\quad t_2=x+2\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_3=x+3\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_4=x+4\cdot\frac{y-x}{n},\quad \ldots$$
$$\ldots,\quad t_{n-2}=x+(n-2)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_{n-1}=x+(n-1)\cdot\frac{y-x}{n},\quad t_n=x+n\cdot\frac{y-x}{n}=y\,.$$
Powyższe punkty dzielą odcinek osi liczbowej od x do y na n równych części.

Wówczas na mocy założenia o funkcji f zachodzą nierówności
$$|f(t_0)-f(t_1)|\leqslant(t_0-t_1)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$
$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant(t_1-t_2)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$
$$|f(t_2)-f(t_3)|\leqslant(t_2-t_3)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|f(t_{n-2})-f(t_{n-1})|\leqslant(t_{n-2}-t_{n-1})^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,,$$
$$|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant(t_{n-1}-t_n)^2=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2=\frac{(x-y)^2}{n^2}\,.$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z powyższych nierówności otrzymujemy
$$|f(x)-f(y)|=$$
$$=|(f(t_0)-f(t_1))+(f(t_1)-f(t_2))+(f(t_2)-f(t_3))+\ldots+(f(t_{n-1})-f(t_n))|\leqslant$$
$$\leqslant|f(t_0)-f(t_1)|+|f(t_1)-f(t_2)|+|f(t_2)-f(t_3)|+\ldots+|f(t_{n-1})-f(t_n)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\frac{(x-y)^2}{n^2}+\ldots+\frac{(x-y)^2}{n^2}=\frac{(x-y)^2}{n}\,.$$

Otrzymaliśmy więc nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{(x-y)^2}{n}$$
prawdziwą dla dowolnej liczby naturalnej n. Ponieważ lewa strona tej nierówności jest nieujemna i nie zależy od n, a prawa może osiągać dowolnie małe wartości dodatnie, otrzymujemy $|f(x)-f(y)|=0$. Stąd wynika, że $f(x)=f(y)$, a w konsekwencji f jest funkcją stałą.

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

305. $a=1$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

306. $a=-1$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

307. $a=2$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{5}}$

308. $a=-2$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{5}}$

309. $a=3$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{10}}$

310. $a=-3$, $\quad b=\boldsymbol{-\sqrt{10}}$

311. $a=3/4$, $\quad b=\boldsymbol{-5/4}$

312. $a=-3/4$, $\quad b=\boldsymbol{-5/4}$

313. $a=4/3$, $\quad b=\boldsymbol{-5/3}$

314. $a=-4/3$, $\quad b=\boldsymbol{-5/3}$

315. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x\}^2+c\cdot\{x\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{0}$

b) $a=\mathbf{-2}$, $b=2$, $c=\mathbf{0}$

c) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=3$

d) $a=2$, $b=\mathbf{-2}$, $c=\mathbf{0}$

e) $a=\mathbf{-3}$, $b=3$, $c=\mathbf{0}$

f) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=5$

316. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{x\}+c\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\mathbf{-1}$, $c=\mathbf{-1}$

b) $a=\mathbf{-2}$, $b=2$, $c=\mathbf{2}$

c) $a=\mathbf{-3}$, $b=\mathbf{3}$, $c=3$

d) $a=4$, $b=\mathbf{-4}$, $c=\mathbf{-4}$

e) $a=\mathbf{-5}$, $b=5$, $c=\mathbf{5}$

f) $a=\mathbf{-6}$, $b=\mathbf{6}$, $c=6$

317. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{dla} \quad x<0 \\ dx+e & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad 1\leqslant x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=\mathbf{3}$, $e=\mathbf{3}$

b) $a=1$, $b=2$, $c=$ **NIE**, $d=4$, $e=$ **NIE**

c) $a=1$, $b=\mathbf{3}$, $c=\mathbf{5}$, $d=4$, $e=5$

d) $a=\mathbf{2}$, $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=\mathbf{8}$

e) $a=6$, $b=7$, $c=\mathbf{10}$, $d=\mathbf{13}$, $e=10$

f) $a=6$, $b=\mathbf{3}$, $c=8$, $d=9$, $e=\mathbf{8}$

318. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

Rozwiązanie:

Funkcja f zależy od $\{x\}$, jest więc okresowa z okresem 1. Ponadto f jest ciągła we wszystkich punktach niecałkowitych. Pozostaje zbadać ciągłość funkcji f w punktach całkowitych, a wobec jej okresowości, wystarczy zbadać ciągłość w punkcie 1.

Ponieważ

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=a+3b$$

oraz

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=b,$$

funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a+3b=b,$$

czyli

$$a=-2b.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a=-2b$.

319. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$ **–3**, $d=$ **–3**

b) $a=$ **–5**, $b=2$, $c=3$, $d=$ **3**

c) $a=$ **NIE**, $b=$ **NIE**, $c=3$, $d=4$

d) $a=2$, $b=3$, $c=$ **–5**, $d=$ **–5**

e) $a=$ **–9**, $b=3$, $c=6$, $d=$ **6**

f) $a=$ **dowolne**, $b=$ **–6–a**, $c=6$, $d=6$

320. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=\mathbf{-5}$, $b=2$, $c=3$, $d=4$

b) $a=1$, $b=\mathbf{-4}$, $c=3$, $d=4$

c) $a=1$, $b=2$, $c=\mathbf{-3}$, $d=4$

d) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$ **NIE**

321. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-5| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 4 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

Rozwiązanie:

Oczywiście funkcja f jest ciągła w każdym punkcie różnym od a i b.

Ponadto

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=4$$

oraz

$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\left|a^2-5\right|,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4=\left|a^2-5\right|.$$

Przekształcanie powyższego równania prowadzi kolejno do

$$a^2-5=\pm4,$$

$$a^2=5\pm4,$$

skąd $a\in\{-3, -1, 1, 3\}$.

Podobnie

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=\left|b^2-5\right|$$

oraz

$$f(b)=\lim_{x\to b^+} f(x)=4,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie b wtedy i tylko wtedy, gdy

$$4=\left|b^2-5\right|,$$

czyli $b\in\{-3, -1, 1, 3\}$.

Zatem funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $a,b\in\{-3, -1, 1, 3\}$, co w połączeniu z warunkiem $a<b$ prowadzi do sześciu par (a, b) spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez pary $(-3, -1)$, $(-3, 1)$, $(-3, 3)$, $(-1, 1)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

322. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\mathbf{1}$, $b=\mathbf{1}$.

323. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 4 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\mathbf{3}$, $b=\mathbf{3}$.

324. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 5 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\mathbf{5}$, $b=\mathbf{5}$.

325. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\sqrt{\mathbf{57}}$, $b=\sqrt{\mathbf{57}}$.

326. $f(x)=\begin{cases}\log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a\\ 7 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$ $a=-\mathbf{11}$, $b=\mathbf{11}$.

327. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a,b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{dla} \quad x<a\\ x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ x & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=-\mathbf{1}$, $b=\mathbf{0}$ $a=-\mathbf{1}$, $b=\mathbf{1}$ $a=\mathbf{0}$, $b=\mathbf{1}$

328. Podać wszystkie sześć par parametrów (a,b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}6 & \text{dla} \quad x<a\\ |x^2-10x+15| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b\\ 6 & \text{dla} \quad b\leqslant x\end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{3}$ $a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{7}$ $a=\mathbf{1}$, $b=\mathbf{9}$

$a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{7}$ $a=\mathbf{3}$, $b=\mathbf{9}$ $a=\mathbf{7}$, $b=\mathbf{9}$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

329.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 1 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{-1}, \qquad b=\mathbf{1}.$$

330.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{0}, \qquad b=\mathbf{1}.$$

331.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{-1}, \qquad b=\mathbf{2}.$$

332.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ x+6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{-2}, \qquad b=\mathbf{3}.$$

333.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x<a \\ 2x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad\qquad a=\mathbf{0}, \qquad b=\mathbf{2}.$$

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

334. $$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^3 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} a=\mathbf{-8}, & b=\mathbf{0} \\ a=\mathbf{-8}, & b=\mathbf{8} \\ a=\mathbf{0}, & b=\mathbf{8} \end{array}$$

335. $$f(x)=\begin{cases} x^6 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^2 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^6 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} a=\mathbf{-2\sqrt{2}}, & b=\mathbf{0} \\ a=\mathbf{-2\sqrt{2}}, & b=\mathbf{2\sqrt{2}} \\ a=\mathbf{0}, & b=\mathbf{2\sqrt{2}} \end{array}$$

336. $$f(x)=\begin{cases} x^9 & \text{dla} \quad x<a \\ 64x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x^9 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} a=\mathbf{-2}, & b=\mathbf{0} \\ a=\mathbf{-2}, & b=\mathbf{2} \\ a=\mathbf{0}, & b=\mathbf{2} \end{array}$$

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

337. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=\ -\infty$

338. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=\ +\infty$

339. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=\ +\infty$

340. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=\ -\infty$

341. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=\ +\infty$

342. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=\ 0$

343. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=\ 0$

344. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=\ +\infty$

345. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}x=\ \pi/2$

346. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}2x=\ \pi/2$

347. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x=\ \pi/2$

348. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x=\ -\pi/2$

349. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}=\ 1/48$

350. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{x-64}{\sqrt{x}-8}=\ 16$

351. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=\ 1/3$

352. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{1/x}}=\ +\infty$

353. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{1/x}}=\ 1$

354. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{1/x}}=\ 2$

355. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{2^{1/x}}}=\ +\infty$

356. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{2^{1/x}}}=\ 2$

357. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{2^{1/x}}}=\ 4$

358. $\lim\limits_{x\to 16^-}\left\{\log_4 x\right\}=\ 1$

359. $\lim\limits_{x\to 16^+}\left\{\log_4 x\right\}=\ 0$

360. $\lim\limits_{x\to 16^-}\left\{\log_8 x\right\}=\ 1/3$

361. $\lim\limits_{x\to 16^+}\left\{\log_8 x\right\}=\ 1/3$

362. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = e^2$

363. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = e^3$

364. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = e^{e^4}$

365. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = e^{e^{27}}$

366. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x} = e^{e^{256}}$

367. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = \mathbf{32}$

368. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = \mathbf{9}$

369. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = \mathbf{64}$

370. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(x+32)-\log_2(x+4)\big) = \mathbf{0}$

371. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(x+4)\big) = \mathbf{5}$

372. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\log_2(32x+1)-\log_2(4x+1)\big) = \mathbf{3}$

373. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \mathbf{e^2}$

374. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \mathbf{e^8}$

375. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \sqrt{\mathbf{e}}$

376. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt[4]{\mathbf{e}}$