Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w poniedziałek 6.12.2021 i wtorek 7.12.2021.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

298. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=x^2$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

299. Dla funkcji $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x)=\dfrac{1}{x}$ wskazać odpowiednie liczby rzeczywiste dodatnie x, y i udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>100\cdot|x-y|\,.$$

300. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+10^8}\,.$$

Dla wybranych przez siebie liczb rzeczywistych x, y udowodnić nierówność

$$|f(x)-f(y)|>0,6\cdot|x-y|\,.$$

301. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y|\,,$$

a dla każdych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunek $|x-y|\geqslant 10$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Dowieść, że

$$|f(6)-f(0)|\leqslant 50\,.$$

302. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+5)-f(x)|\leqslant 5 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 35\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(8)-f(0)|\leqslant 30\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

303. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 10\cdot|x-y| \quad \text{dla dowolnych } x,y\in\mathbb{R}$$

oraz

$$|f(x+10)-f(x)|\leqslant 10 \quad \text{dla dowolnego } x\in\mathbb{R}\,.$$

Udowodnić jedną z następujących dwóch nierówności:

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 80\,, \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza)}$$

$$|f(17)-f(0)|\leqslant 50\,. \qquad \textbf{(wersja trudniejsza)}$$

304. Dana jest taka funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniony jest warunek

$$|f(x)-f(y)|\leqslant (x-y)^2\,.$$

Dowieść, że wówczas f jest funkcją stałą.

W każdym z poniższych 10 zadań dla podanej liczby a podaj taką liczbę b, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=a|x|+bx$$

spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość $f(f(x))=x$, czyli jest odwrotna do samej siebie.

305. $a=1$, $b=$ ....

306. $a=-1$, $b=$ ....

307. $a=2$, $b=$ ....

308. $a=-2$, $b=$ ....

309. $a=3$, $b=$ ....

310. $a=-3$, $b=$ ....

311. $a=3/4$, $b=$ ....

312. $a=-3/4$, $b=$ ....

313. $a=4/3$, $b=$ ....

314. $a=-4/3$, $b=$ ....

315. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x\}^2+c\cdot\{x\},$$
gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\dots\dots\dots$, $c=\dots\dots\dots$ **b)** $a=\dots\dots\dots$, $b=2$, $c=\dots\dots\dots$

c) $a=\dots\dots\dots$, $b=\dots\dots\dots$, $c=3$ **d)** $a=2$, $b=\dots\dots\dots$, $c=\dots\dots\dots$

e) $a=\dots\dots\dots$, $b=3$, $c=\dots\dots\dots$ **f)** $a=\dots\dots\dots$, $b=\dots\dots\dots$, $c=5$

316. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{x\}+c\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$
gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=\dots\dots\dots$, $c=\dots\dots\dots$ **b)** $a=\dots\dots\dots$, $b=2$, $c=\dots\dots\dots$

c) $a=\dots\dots\dots$, $b=\dots\dots\dots$, $c=3$ **d)** $a=4$, $b=\dots\dots\dots$, $c=\dots\dots\dots$

e) $a=\dots\dots\dots$, $b=5$, $c=\dots\dots\dots$ **f)** $a=\dots\dots\dots$, $b=\dots\dots\dots$, $c=6$

317. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{dla} \quad x<0 \\ dx+e & \text{dla} \quad 0\leqslant x<1 \\ ax^2+bx+c & \text{dla} \quad 1\leqslant x \end{cases}$$

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $e=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

b) $a=1$, $b=2$, $c=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $d=4$, $e=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

c) $a=1$, $b=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $c=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $d=4$, $e=5$

d) $a=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $b=7$, $c=8$, $d=9$, $e=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

e) $a=6$, $b=7$, $c=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $d=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $e=10$

f) $a=6$, $b=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, $c=8$, $d=9$, $e=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

318. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{x\}+b\cdot 3^{\{x\}},$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x, a w drugim składniku wyrażenie $\{x\}$ występuje **w wykładniku potęgi** o podstawie 3.

Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), dla których funkcja f określona powyższym wzorem jest ciągła.

319. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\cdot\{2x\}+b\cdot\{2x+1\}+c\cdot\{x\}+d\cdot\left\{x+\frac{1}{2}\right\},$$

gdzie $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakujące liczby rzeczywiste tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczby rzeczywiste o żądanej własności nie istnieją.

a) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=$ ....

b) $a=$ ...., $b=2$, $c=3$, $d=$ ....

c) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=3$, $d=4$

d) $a=2$, $b=3$, $c=$ ...., $d=$ ....

e) $a=$ ...., $b=3$, $c=6$, $d=$ ....

f) $a=$ ...., $b=$ ...., $c=6$, $d=6$

320. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=a\{x\}^3+b\{x\}^2+c\{x\}+d,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x.

W każdym z podpunktów uzupełnij brakującą liczbę tak, aby funkcja f zdefiniowana powyższym wzorem była ciągła. Wpisz **NIE**, jeśli uważasz, że liczba o żądanej własności nie istnieje.

a) $a=$ ...., $b=2$, $c=3$, $d=4$

b) $a=1$, $b=$ ...., $c=3$, $d=4$

c) $a=1$, $b=2$, $c=$ ...., $d=4$

d) $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=$ ....

321. Wyznaczyć wszystkie pary parametrów rzeczywistych (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-5| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 4 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

322. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

323. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 4 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

324. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 5 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

325. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 6 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

326. $f(x)=\begin{cases} \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad x<a \\ 7 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ \log_2(x^2+7) & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$ $a=\ldots\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots\ldots.$

327. Podać wszystkie trzy pary parametrów (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad x<a \\ x^3 & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ x & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots$

328. Podać wszystkie sześć par parametrów (a, b), gdzie $a<b$, dla których funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} 6 & \text{dla} \quad x<a \\ |x^2-10x+15| & \text{dla} \quad a\leqslant x<b \\ 6 & \text{dla} \quad b\leqslant x \end{cases}$$

jest ciągła.

$a=\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots$

$a=\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots$ $a=\ldots\ldots,$ $b=\ldots\ldots$

W każdym z pięciu poniższych zadań podaj takie liczby rzeczywiste $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

329.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ 1 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

330.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ x & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

331.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ x+2 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

332.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ x+6 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

333.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{dla } x<a \\ 2x & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^2 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

W każdym z trzech poniższych zadań podaj takie trzy pary liczb rzeczywistych $a<b$, aby funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona podanym wzorem była ciągła.

334. $$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{dla } x<a \\ 64x & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^3 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

335. $$f(x)=\begin{cases} x^6 & \text{dla } x<a \\ 64x^2 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^6 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

336. $$f(x)=\begin{cases} x^9 & \text{dla } x<a \\ 64x^3 & \text{dla } a\leqslant x<b \\ x^9 & \text{dla } b\leqslant x \end{cases}$$

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

$a=$ ...., $b=$ ....

W każdym z poniższych zadań podaj wartość granicy funkcji lub granicy niewłaściwej $+\infty=\infty$ albo $-\infty$. Wpisz literkę **R**, jeśli nie istnieje granica ani granica niewłaściwa.

Możesz wykorzystać granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$

337. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=$ ....

338. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=$ ....

339. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{17}-3\right)}x=$ ....

340. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{\left(\sqrt{13}-3\right)}x=$ ....

341. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$ ....

342. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$ ....

343. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{17}-3\right)^x=$ ....

344. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{13}-3\right)^x=$ ....

345. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}x=$ ....

346. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}2x=$ ....

347. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{17}-4\right)x=$ ....

348. $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{13}-4\right)x=$ ....

349. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}=$ ....

350. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{x-64}{\sqrt{x}-8}=$ ....

351. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}=$ ....

352. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{1/x}}=$ ....

353. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{1/x}}=$ ....

354. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{1/x}}=$ ....

355. $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

356. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

357. $\lim\limits_{x\to +\infty}2^{2^{2^{1/x}}}=$ ....

358. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_4 x\}=$ ....

359. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_4 x\}=$ ....

360. $\lim\limits_{x\to 16^-}\{\log_8 x\}=$ ....

361. $\lim\limits_{x\to 16^+}\{\log_8 x\}=$ ....

362. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = \ \ldots\ldots\ldots$ **363.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \ \ldots\ldots\ldots$

364. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+4)^x} = \ \ldots$ **365.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+27)^x} = \ \ldots$

366. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^x}\right)^{(x+256)^x} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

367. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{5^{4^{3^x}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **368.** $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{2^{5^{4^x}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

369. $\lim\limits_{x\to-\infty} 4^{3^{2^{5^x}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

370. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(x+32)-\log_2(x+4)\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

371. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(32x+1)-\log_2(x+4)\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

372. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_2(32x+1)-\log_2(4x+1)\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

373. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \ldots\ldots\ldots$ **374.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \ldots\ldots\ldots$

375. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{4x^2+1}} = \ldots\ldots\ldots$ **376.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{\sqrt{x^2+4}} = \ldots\ldots\ldots$