

W każdym z poniższych zadań podaj dziedzinę funkcji f określonej podanym wzorem.

$$262. \quad f(x) = \sqrt{(x-1) \cdot (x-4)} \quad D_f = (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$$

$$263. \quad f(x) = \sqrt{(x-1) \cdot (x-4)^2} \quad D_f = [1, +\infty)$$

$$264. \quad f(x) = \sqrt{(x-1)^2 \cdot (x-4)} \quad D_f = \{1\} \cup [4, +\infty)$$

$$265. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-1) \cdot (x-4)} \quad D_f = [-1, 1] \cup [4, +\infty)$$

$$266. \quad f(x) = \sqrt{(x-1) \cdot (x^2-4)} \quad D_f = [-2, 1] \cup [2, +\infty)$$

$$267. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-1) \cdot (x^2-4)} \quad D_f = (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$$

$$268. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-1)^2 \cdot (x^2-4)} \quad D_f = (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup \{1\} \cup [2, +\infty)$$

$$269. \quad f(x) = \sqrt{(x-4) \cdot (x-9) \cdot (x-16)} \quad D_f = [4, 9] \cup [16, +\infty)$$

$$270. \quad f(x) = \sqrt{(x-4)^{2022} \cdot (x-9)^{2022} \cdot (x-16)^{2021}} \quad D_f = \{4\} \cup \{9\} \cup [16, +\infty)$$

$$271. \quad f(x) = \sqrt{(x-4)^{2021} \cdot (x-9)^{2021} \cdot (x-16)^{2022}} \quad D_f = (-\infty, 4] \cup [9, +\infty)$$

$$272. \quad f(x) = \sqrt{(x-4)^{2021} \cdot (x-9)^{2022} \cdot (x-16)^{2021}} \quad D_f = (-\infty, 4] \cup \{9\} \cup [16, +\infty)$$

$$273. \quad f(x) = \sqrt{(x-4) \cdot (x-9) \cdot (x^2-16)} \quad D_f = (-\infty, -4] \cup \{4\} \cup [9, +\infty)$$

$$274. \quad f(x) = \sqrt{(x-4) \cdot (x^2-9) \cdot (x^2-16)} \quad D_f = [-4, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$275. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-4) \cdot (x^2-9) \cdot (x^2-16)} \quad D_f = \\ = (-\infty, -4] \cup [-3, -2] \cup [2, 3] \cup [4, +\infty)$$

$$276. \quad f(x) = \sqrt{(x^2-4) \cdot (x^2-9) \cdot (x^4-16)} \quad D_f = (-\infty, -3] \cup \{-2\} \cup \{2\} \cup [3, +\infty)$$

$$277. \quad f(x) = \sqrt{(3 - \log_2 x) \cdot (5 - \log_2 x) \cdot (3 - \log_3 x)} \quad D_f = (0, 8] \cup [27, 32]$$

$$278. \quad f(x) = \sqrt{(3 - \log_2 x) \cdot (2 - \log_5 x) \cdot (3 - \log_3 x)} \quad D_f = (0, 8] \cup [25, 27]$$

$$279. \quad f(x) = \sqrt{(3 - \log_4 x) \cdot (6 - \log_2 x) \cdot (3 - \log_3 x)} \quad D_f = (0, 27] \cup \{64\}$$

$$280. \quad f(x) = \sqrt{\log_2 \log_3 x} \quad D_f = [3, +\infty)$$

$$281. \quad f(x) = \sqrt{\log_3 \log_2 x} \quad D_f = [2, +\infty)$$

$$282. \quad f(x) = \sqrt{\log_5 \log_3 \log_2 x} \quad D_f = [8, +\infty)$$

$$283. \quad f(x) = \sqrt{\log_3 \log_2 \log_5 x} \quad D_f = [25, +\infty)$$

$$284. \quad f(x) = \log_2 \log_x 256 \quad D_f = (1, +\infty)$$

$$285. \quad f(x) = \log_2 \log_2 \log_x 256 \quad D_f = (1, 256)$$

$$286. \quad f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256 \quad D_f = (1, 16)$$

$$287. \quad f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256 \quad D_f = (1, 4)$$

$$288. \quad f(x) = \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_2 \log_x 256 \quad D_f = (1, \sqrt{2})$$

289. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podanymi niżej wzorami i wykresami funkcji na kolejnych stronach. W każdym z zadań 289.a-289.j podaj numer rysunku, na którym znajduje się wykres funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem.

Przypomnienie: $\{y\}$ oznacza część ułamkową liczby y .

$$289.a. \quad f(x) = \{|x|\} \quad 5 \qquad 289.b. \quad f(x) = \{x\}^2 \quad 1$$

$$289.c. \quad f(x) = \{|x|\}^2 \quad 4 \qquad 289.d. \quad f(x) = \sqrt{\{x\}} \quad 8$$

$$289.e. \quad f(x) = \sqrt{\{|x|\}} \quad 7 \qquad 289.f. \quad f(x) = \{\sqrt{|x|}\} \quad 6$$

$$289.g. \quad f(x) = \sqrt[5]{\{x\}} \quad 9 \qquad 289.h. \quad f(x) = \{\sqrt[5]{x}\} \quad 10$$

$$289.i. \quad f(x) = \{x\}^5 \quad 2 \qquad 289.j. \quad f(x) = \{|x|\}^5 \quad 3$$

290. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 10^4}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{20}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^2 + 10^4}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^2 + 10^4}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^2 + 10^4} - \sqrt[4]{y^2 + 10^4} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^2 + 10^4) - (y^2 + 10^4)}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4} \right)} \right| = \\ &= \frac{|x^2 - y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4} \right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4} \right)}. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt{x^2}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4}} < 1.$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{0 + 10^4} + \sqrt[4]{0 + 10^4}} = \frac{1}{10 + 10} = \frac{1}{20}.$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x - y| \cdot |x + y|}{\left(\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4} \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4} \right)} = \\ &= |x - y| \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 10^4} + \sqrt[4]{y^2 + 10^4}} \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{x^2 + 10^4} + \sqrt{y^2 + 10^4}} \leq |x - y| \cdot \frac{1}{20} \cdot 1 = \frac{|x - y|}{20}. \end{aligned}$$

291. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2),$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[4]{x^4 + 1}$ oraz $b = \sqrt[4]{y^4 + 1}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{y^4 + 1} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^4 + 1) - (y^4 + 1)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)} \right| = \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|x^4 - y^4|}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)} = \\ &= \frac{|x^2 - y^2| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}} < 1. \quad (3)$$

Podobnie, wykorzystując równość $x^2 = \sqrt{x^4}$ otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} < \sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1},$$

skąd

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}} < 1. \quad (4)$$

Połączenie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\begin{aligned} &\frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{\left(\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}\right)} = \\ &= |x - y| \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{y^4 + 1}} \cdot \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 1}} \leq |x - y| \cdot 1 \cdot 1 = |x - y|. \end{aligned}$$

292. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[8]{x^4 + 10^8}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{20}.$$

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} a^8 - b^8 &= (a^4 - b^4) \cdot (a^4 + b^4) = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) = \\ &= (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4), \end{aligned}$$

który przy założeniu $a + b \neq 0$ można zapisać w postaci

$$a - b = \frac{a^8 - b^8}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4)}.$$

Przyjmując $a = \sqrt[8]{x^4 + 10^8}$ oraz $b = \sqrt[8]{y^4 + 10^8}$, zauważamy, że $a + b > 0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[8]{x^4 + 10^8} - \sqrt[8]{y^4 + 10^8} \right| = \\ &= \left| \frac{(x^4 + 10^8) - (y^4 + 10^8)}{(\sqrt[8]{x^4 + 10^8} + \sqrt[8]{y^4 + 10^8}) \cdot (\sqrt[4]{x^4 + 10^8} + \sqrt[4]{y^4 + 10^8}) \cdot (\sqrt{x^4 + 10^8} + \sqrt{y^4 + 10^8})} \right| = \\ &= \frac{|x^4 - y^4|}{(\sqrt[8]{x^4 + 10^8} + \sqrt[8]{y^4 + 10^8}) \cdot (\sqrt[4]{x^4 + 10^8} + \sqrt[4]{y^4 + 10^8}) \cdot (\sqrt{x^4 + 10^8} + \sqrt{y^4 + 10^8})} = \\ &= \frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{(\sqrt[8]{x^4 + 10^8} + \sqrt[8]{y^4 + 10^8}) \cdot (\sqrt[4]{x^4 + 10^8} + \sqrt[4]{y^4 + 10^8}) \cdot (\sqrt{x^4 + 10^8} + \sqrt{y^4 + 10^8})}. \quad (1) \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x| = \sqrt[4]{x^4}$ otrzymujemy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| = \sqrt[4]{x^4} + \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{x^4 + 10^8} + \sqrt[4]{y^4 + 10^8},$$

skąd

$$\frac{|x + y|}{\sqrt[4]{x^4 + 10^8} + \sqrt[4]{y^4 + 10^8}} < 1. \quad (2)$$

Z kolei równość $x^2 = \sqrt{x^4}$ prowadzi do:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^4} + \sqrt{y^4} < \sqrt{x^4 + 10^8} + \sqrt{y^4 + 10^8},$$

skąd

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + 10^8} + \sqrt{y^4 + 10^8}} < 1. \quad (3)$$

Ponadto zauważamy, że

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x^4 + 10^8} + \sqrt[8]{y^4 + 10^8}} \leq \frac{1}{\sqrt[8]{0 + 10^8} + \sqrt[8]{0 + 10^8}} = \frac{1}{10 + 10} = \frac{1}{20}. \quad (4)$$

Zastosowanie nierówności (2), (3) i (4) do (1) pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x - y| \cdot |x + y| \cdot (x^2 + y^2)}{(\sqrt[8]{x^4 + 10^8} + \sqrt[8]{y^4 + 10^8}) \cdot (\sqrt[4]{x^4 + 10^8} + \sqrt[4]{y^4 + 10^8}) \cdot (\sqrt{x^4 + 10^8} + \sqrt{y^4 + 10^8})} =$$

$$\begin{aligned}
&= |x-y| \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^4+10^8} + \sqrt[8]{y^4+10^8}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt[4]{x^4+10^8} + \sqrt[4]{y^4+10^8}} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+10^8} + \sqrt{y^4+10^8}} \leq \\
&\leq |x-y| \cdot \frac{1}{20} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{|x-y|}{20}.
\end{aligned}$$

293. Niech funkcja $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt[16]{x}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [1, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{16}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności stosując czterokrotnie wzór na różnicę kwadratów¹, a następnie szacujemy korzystając z nierówności $x, y \geq 1$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \sqrt[16]{x} - \sqrt[16]{y} \right| = \frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{x} + \sqrt[16]{y} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{y} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} \right)} \leq \\
&\leq \frac{|x-y|}{\left(\sqrt[16]{1} + \sqrt[16]{1} \right) \cdot \left(\sqrt[8]{1} + \sqrt[8]{1} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{1} \right) \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{1} \right)} = \frac{|x-y|}{16},
\end{aligned}$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 1$.

294. Niech funkcja $f: [3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [3, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{25}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 3$:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right| = \left| \frac{y^3 - x^3}{x^3 y^3} \right| = \frac{|x-y| \cdot (x^2 + xy + y^2)}{x^3 y^3} = \\
&= |x-y| \cdot \left(\frac{x^2}{x^3 y^3} + \frac{xy}{x^3 y^3} + \frac{y^2}{x^3 y^3} \right) = |x-y| \cdot \left(\frac{1}{x y^3} + \frac{1}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^3 y} \right) \leq \\
&\leq |x-y| \cdot \left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4} \right) = |x-y| \cdot \frac{3}{3^4} = |x-y| \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{|x-y|}{27} \leq \frac{|x-y|}{25},
\end{aligned}$$

co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 3$.

¹Można również zastosować ogólny wzór na różnicę n -tych potęg dla $n = 16$.

295. Niech funkcja $f : [16, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [16, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{128}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 16$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \right| = \frac{|\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}|}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})} = \\ &= \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y})} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt[4]{16 \cdot 16} \cdot (\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{16}) \cdot (\sqrt{16} + \sqrt{16})} = \\ &= \frac{|x - y|}{4 \cdot (2 + 2) \cdot (4 + 4)} = \frac{|x - y|}{128}, \end{aligned}$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych $x, y \geq 16$.

296. Niech funkcja $f : [8, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/60$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 8$:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq \frac{|x - y|}{8 \cdot 8} = \frac{|x - y|}{64} \leq \frac{|x - y|}{60},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/60$ i dowolnych $x, y \geq 8$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/80$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 8$ oraz $y = 9$ mamy $|x - y| = 1$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{72} > \frac{|x - y|}{80},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 8$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/80$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [8, \infty)$.

297. Niech funkcja $f : [25, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.

Zdanie Z: Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

a) Dowieść, że **zdanie Z** jest prawdziwe dla $C = 1/10$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności $x, y \geq 25$:

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{|x - y|}{\sqrt{25} + \sqrt{25}} = \frac{|x - y|}{5 + 5} = \frac{|x - y|}{10},$$

co stanowi dowód danej w treści zadania nierówności dla $C = 1/10$ i dowolnych $x, y \geq 25$.

b) Dowieść, że **zdanie Z** jest fałszywe dla $C = 1/12$.

Rozwiązanie:

Dla $x = 25$ oraz $y = 36$ mamy $|x - y| = 11$ oraz

$$|f(x) - f(y)| = 1 = \frac{|x - y|}{11} > \frac{|x - y|}{12},$$

wskazaliśmy więc przykład liczb $x, y \geq 25$, dla których dana w treści zadania nierówność jest fałszywa przy $C = 1/12$.

Nie jest więc prawdą, że ta nierówność zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in [25, \infty)$.