Kolokwium nr 3: poniedziałek[1] **29.11.2021,** godz. 10:15-11:00, materiał zad. 1–261.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w poniedziałek 22.11.2021 i wtorek 23.11.2021.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

204. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8n^k+\sqrt{n}-4}}{8n^4-3n^3+5}$$

w zależności od parametru naturalnego k.

205. Rozstrzygnąć zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k+1}}{n^7+1} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{k+1}+1}}{n^7+1}$$

dla tak dobranej wartości parametru naturalnego k, że dokładnie jeden z tych szeregów jest zbieżny.

206. Ciąg (a_n) o wyrazach rzeczywistych spełnia dla każdej liczby naturalnej n nierówność

$$|a_n-a_{n+1}|<\frac{1}{n}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy stąd wynika, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

207. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9\,.$$

208. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8\,.$$

209. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1\,.$$

210. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,.$$

Dla podanego przykładu wyznaczyć wartości sum szeregów występujących w powyższym równaniu i sprawdzić, że jest ono spełnione.

[1] W przypadku, gdy 29.11.2021 będą zajęcia zdalne, kolokwium odbędzie się zdalnie na wykładzie w środę 1.12.2021 o godz. 8:15.

211. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = 6\,.$$

212. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \frac{4}{3}\,.$$

213. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\,.$$

214. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 5\,.$$

215. Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie S. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = T\,.$$

Wyznaczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ w zależności od S i T.

216. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyraz a_n jest dodatni, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 13\,.$$

217. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\,.$$

218. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-9}\,.$$

219. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}\,.$$

220. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}\,.$$

221. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}\,.$$

222. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)}\,.$$

223. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n}\,.$$

224. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^3-4n}\,.$$

225. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)}\,.$$

226. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}\,.$$

Niech

$$a_n = \frac{120}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

227. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ ....

228. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ ....

229. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ ....

230. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ ....

231. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) =$ ....

232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) =$ ....

233. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+3}^2\right) =$ ....

234. $\sum\limits_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

235. $\sum\limits_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

236. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

Niech

$$a_n = \frac{60}{n(n+1)} \qquad \text{dla} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 60.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

237. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ ....

238. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ ....

239. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) =$ ....

240. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) =$ ....

241. $\sum\limits_{\mathbf{n=3}}^{\infty} a_n =$ ....

242. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^3 - a_{n+1}^3\right) =$ ....

243. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big((a_n - a_{n+1}) \cdot (a_n + a_{n+1})\Big) =$ ....

244. $\sum\limits_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

245. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

246. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2 + 1600} - \sqrt{a_{n+1}^2 + 1600}\right) =$ ....

W każdym z poniższych 5 zadań podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

247. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ ....

248. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ ....

249. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+3]{n+3}\right)=$ ....

250. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ ....

251. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ ....

Niech $a_n=\dfrac{120}{n(n+2)}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 90.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

252. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$ ....

253. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$ ....

254. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ ....

255. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ ....

256. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+3}^2\right)=$ ....

257. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

258. $\sum\limits_{\mathbf{n=6}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

259. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

260. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(3^{a_n}-3^{a_{n+1}}\right)=$ ....

261. $\sum\limits_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+1}}\right)=$ ....