W każdym z poniższych zadań podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być podane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz określ, czy kresy należą do zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\ldots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

133. $Z=\left\{\dfrac{1}{n^2-60}:n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-1/11}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

134. $Z=\left\{\dfrac{1}{n^2-70}:n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-1/6}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/11}$ Czy $\in Z$? **TAK**

135. $Z=\left\{\sqrt{25n^2+24n}-5n:n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{12/5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

136. $Z=\left\{\sqrt{25n^2-24n}-5n:n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-4}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{-12/5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

137. $Z=\left\{\sqrt{25n^2+24n}+\sqrt{25n^2-24n}-10n:n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE**

138. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 16n^2\leqslant 9m^2\leqslant 25n^2\right\}$
$\inf Z=\mathbf{4/3}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{5/3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

139. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 16n^2\leqslant 2m^2\leqslant 32n^2\right\}$
$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

140. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 3n^2\leqslant m^2\leqslant 4n^2\right\}$
$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

141. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 4m^2\leqslant n^2\leqslant 5m^2\right\}$
$\inf Z=\boldsymbol{1/\sqrt{5}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

142. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 3^n\leqslant 2^m\leqslant 4^n\right\}$
$\inf Z=\boldsymbol{\log_2 3}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

143. $Z=\left\{\dfrac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \land\ 4^m\leqslant 2^n\leqslant 5^m\right\}$
$\inf Z=\boldsymbol{\log_5 2}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

144. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 9^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 27^{n^2}\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt{2}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\boldsymbol{\sqrt{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

145. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 32^{n^2}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\boldsymbol{\sqrt{5}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

146. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 16^{n^2}\leqslant 9^{m^2}\leqslant 25^{n^2}\right\}$

$\inf Z=\sqrt{\mathbf{log_9 16}}=\sqrt{\mathbf{log_3 4}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

$\sup Z=\sqrt{\mathbf{log_9 25}}=\sqrt{\mathbf{log_3 5}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

147. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 4^n\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 27^n\cdot n^m\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

148. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^{24n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 3^{18n}\cdot n^m\right\}$

$\inf Z=\mathbf{8}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{9}$ Czy $\in Z$? **TAK**

149. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^{8n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{160n}\cdot n^m\right\}$

$\inf Z=\mathbf{4}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{32}$ Czy $\in Z$? **TAK**

150. $Z=\left\{\frac{m}{n} : m,n\in\mathbb{N} \wedge 2^{64n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 3^{81n}\cdot n^m\right\}$

$\inf Z=\mathbf{16}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{27}$ Czy $\in Z$? **TAK**

151. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{5}\right)^2 : n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{1/100}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{9/25}$ Czy $\in Z$? **NIE**

152. $Z=\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{3}{5}\right)^3 : n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-27/125}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{8/125}$ Czy $\in Z$? **TAK**

153. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

154. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^{n^2} : n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/16}$ Czy $\in Z$? **TAK**

155. $Z=\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1}$ Czy $\in Z$? **TAK**

156. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+370}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1/5}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/6}$ Czy $\in Z$? **TAK**

157. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+390}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{-1}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/6}$ Czy $\in Z$? **TAK**

158. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+410}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/10}$ Czy $\in Z$? **TAK**

159. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-40n+430}:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/30}$ Czy $\in Z$? **TAK**

160. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^2\leqslant m^2\leqslant 27n^2\right\}$

$\inf Z=\mathbf{5}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\boldsymbol{\sqrt{27}=3\cdot\sqrt{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

161. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 25n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt[3]{25}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

162. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^n\leqslant 8^m\leqslant 27^n\right\}$

$\inf Z=\mathbf{4/3}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\log_8 27=\boxed{\mathbf{log_2 3}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

163. $Z=\left\{\frac{m}{n}:m,n\in\mathbb{N}\ \wedge\ 16^n\leqslant 9^m\leqslant 27^n\right\}$

$\inf Z=\log_9 16=\boxed{\mathbf{log_3 4=2\cdot log_3 2}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{3/2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

164. $Z=\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$ Czy $\in Z$? **TAK**

165. $Z=\left\{\left(2-\sqrt{5}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{2-\sqrt{5}}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\boldsymbol{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\boldsymbol{9-4\sqrt{5}}$ Czy $\in Z$? **TAK**

166. $Z=\left\{\binom{50}{n}: n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{1}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\boldsymbol{\binom{50}{25}}$ Czy $\in Z$? **TAK**

167. $Z=\left\{\binom{50}{n}\cdot(-1)^n: n\in\{0,1,2,3,\ldots,49,50\}\right\}$

$\inf Z=-\boldsymbol{\binom{50}{25}}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\boldsymbol{\binom{50}{24}}=\boldsymbol{\binom{50}{26}}$ Czy $\in Z$? **TAK**

168. $Z=\left\{\sqrt{x^2+2x+1}: x\in(-5,\,2)\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{4}$ Czy $\in Z$? **NIE**

169. $Z=\left\{\sqrt[4]{x^2+2x+1}: x\in(-5,\,2)\right\}$

$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **NIE**

170. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\wedge 5^3\cdot n^{15}\leqslant m^{15}\leqslant 3^5\cdot n^{15}\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt[5]{5}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\boldsymbol{\sqrt[3]{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

171. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\wedge 5^2\cdot n^{10}\leqslant m^{10}\leqslant 2^5\cdot n^{10}\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt[5]{5}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\boldsymbol{\sqrt{2}}$ Czy $\in Z$? **NIE**

172. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\wedge 3^2\cdot n^{6}\leqslant m^{6}\leqslant 2^3\cdot n^{6}\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{+\infty}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\boldsymbol{-\infty}$ Czy $\in Z$? **NIE**

173. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\wedge 4^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 8^{mn}\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt{2}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

174. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\wedge 16^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 4^{mn}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK**

175. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\wedge 81^{n^2}\leqslant 3^{m^2}\leqslant 11^{mn}\right\}$

$\inf Z=\mathbf{2}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\boldsymbol{\log_3 11}$ Czy $\in Z$? **NIE**

176. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N}\wedge 8^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 5^{mn}\right\}$

$\inf Z=\boldsymbol{\sqrt{3}}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\boldsymbol{\log_2 5}$ Czy $\in Z$? **NIE**

177. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \,\wedge\, 32^{n^2}\leqslant 2^{m^2}\leqslant 3^{mn}\right\}$
$\inf Z = \mathbf{+\infty}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z = \mathbf{-\infty}$ Czy $\in Z$? **NIE**

178. $Z=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N} \,\wedge\, 8n^3\leqslant m^3\leqslant 27n^3\right\}$
$\inf Z = \mathbf{4}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z = \mathbf{9}$ Czy $\in Z$? **TAK**

179. $Z=\left\{\frac{m^2}{n^2}: m,n\in\mathbb{N} \,\wedge\, 25n^4\leqslant m^4\leqslant 49n^4\right\}$
$\inf Z = \mathbf{5}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z = \mathbf{7}$ Czy $\in Z$? **NIE**

180. $Z=\left\{\frac{m}{n}: m,n\in\mathbb{N} \,\wedge\, 3^{18^2\cdot n}\cdot n^m\leqslant m^m\leqslant 2^{2^{11}\cdot n}\cdot n^m\right\}$
$\inf Z = \mathbf{81}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z = \mathbf{256}$ Czy $\in Z$? **TAK**

181. $Z=\{\log_x 8: x\in[2,+\infty)\}$
$\inf Z = \mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z = \mathbf{3}$ Czy $\in Z$? **TAK**

182. $Z=\{\log_x 32: x\in(0,1/2]\}$
$\inf Z = \mathbf{-5}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z = \mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE**

183. $Z=\left\{\frac{1}{n^2-44}: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z = \mathbf{-1/8}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z = \mathbf{1/5}$ Czy $\in Z$? **TAK**

184. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+44}: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z = \mathbf{-1/45}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z = \mathbf{1/48}$ Czy $\in Z$? **TAK**

185. $Z=\left\{\frac{(-1)^n}{n^2-44}: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z = \mathbf{-1/5}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z = \mathbf{1/19}$ Czy $\in Z$? **TAK**

186. $Z=\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^n: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z = \mathbf{-1/3}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z = \mathbf{1/9}$ Czy $\in Z$? **TAK**

187. $Z=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}: n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z = \mathbf{1/3}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z = \mathbf{1/2}$ Czy $\in Z$? **NIE**

188. $Z=\left\{x^n: x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)\wedge n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z = \mathbf{-1/2}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z = \mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **NIE**

189. $Z=\{\log_2(2n-1)-\log_2 n:\ n\in\mathbb{N}\}$
$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1}$ Czy $\in Z$? **NIE**

190. $Z=\left\{\frac{(\log_2(n^2+1))\cdot\log_3(n^2+4)}{(\log_8(n^2+4))\cdot\log_9(n^2+1)}:\ n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{6}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{6}$ Czy $\in Z$? **TAK**

191. $Z=\left\{\frac{1}{5^m-11^n}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{-1/6}$ Czy $\in Z$? **TAK** $\sup Z=\mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

192. $Z=\left\{\frac{mn}{m^2+4n^2}:\ m,n\in\mathbb{N}\right\}$
$\inf Z=\mathbf{0}$ Czy $\in Z$? **NIE** $\sup Z=\mathbf{1/4}$ Czy $\in Z$? **TAK**

193. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ |a_n-1|<\frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **193.1-193.10** podaj odpowiedni kres zbioru.
193.1. $\sup\{a_1:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$
193.2. $\inf\{a_1:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{0}$
193.3. $\sup\{a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{3/2}$
193.4. $\inf\{a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1/2}$
193.5. $\sup\{a_2-a_3:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{5/6}$
193.6. $\inf\{a_2-a_3:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-5/6}$
193.7. $\sup\{a_3-a_6:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1/2}$
193.8. $\inf\{a_3-a_6:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-1/2}$
193.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{4}$
193.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$

194. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \left|a_n-\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **194.1-194.10** podaj odpowiedni kres zbioru.
194.1. $\sup\{a_1:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$
194.2. $\inf\{a_1:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{0}$
194.3. $\sup\{a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1}$
194.4. $\inf\{a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{0}$
194.5. $\sup\{a_2-a_3:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{1}$
194.6. $\inf\{a_2-a_3:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-2/3}$
194.7. $\sup\{a_3-a_6:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2/3}$
194.8. $\inf\{a_3-a_6:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-1/3}$
194.9. $\sup\{a_2+a_3+a_6:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{2}$
194.10. $\inf\{a_2+a_3+a_6:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{0}$

195. Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów **zbieżnych** (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n-6|<\frac{n+1}{n}\,.$$

W każdym z zadań **195.1-195.10** podaj odpowiedni kres zbioru.

195.1. $\sup\{a_1:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{8}$

195.2. $\inf\{a_1:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{4}$

195.3. $\sup\{a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{7,5=15/2=7\frac{1}{2}}$

195.4. $\inf\{a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{4,5=9/2=4\frac{1}{2}}$

195.5. $\sup\{a_1-a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{3,5=7/2=3\frac{1}{2}}$

195.6. $\inf\{a_1-a_2:\ (a_n)\in\mathbb{T}\}=\mathbf{-3,5=-7/2=-3\frac{1}{2}}$

195.7. $\sup\left\{\lim\limits_{n\to\infty}a_n:\ (a_n)\in\mathbb{T}\right\}=\mathbf{7}$

195.8. $\inf\left\{\lim\limits_{n\to\infty}a_n:\ (a_n)\in\mathbb{T}\right\}=\mathbf{5}$

195.9. $\sup\left\{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_1):\ (a_n)\in\mathbb{T}\right\}=\mathbf{3}$

195.10. $\inf\left\{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_1):\ (a_n)\in\mathbb{T}\right\}=\mathbf{-3}$

196. W każdym z zadań **196.1-196.6** podaj w postaci uproszczonej (np. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru.

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty=\infty$.

Niech $\mathbb{T}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów (a_n) spełniających warunek

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n-a_{n+1}|<\frac{1}{n}\,.$$

196.1. $A=\{a_1:(a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf A=$ .... $\sup A=$ ....

196.2. $B=\{a_3-a_1:(a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf B=$ .... $\sup B=$ ....

196.3. $C=\{a_4-a_2:(a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf C=$ .... $\sup C=$ ....

196.4. $D=\{a_4-a_1:(a_n)\in\mathbb{T}\}$

$\inf D=$ .... $\sup D=$ ....

196.5. $E=\left\{(a_3-a_1)^2:(a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf E=$ .... $\sup E=$ ....

196.6. $F=\left\{a_3^2-a_1^2:(a_n)\in\mathbb{T}\right\}$

$\inf F=$ .... $\sup F=$ ....

---

197. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$Z=\left\{\frac{mn}{4m^2+9n^2}:m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania oprzemy na następujących spostrzeżeniach:

1° Wszystkie elementy zbioru Z są dodatnie.

2° Istnieje ciąg o wyrazach ze zbioru Z zbieżny do zera.

Dla dowodu tego spostrzeżenia wystarczy przyjąć $m=1$ w wyrażeniu

$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}. \qquad (\heartsuit)$$

Otrzymamy wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4+9n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\cdot n^{-1}+9n}=0.$$

3° Liczba $1/12$ jest elementem zbioru Z.

Aby to zobaczyć, wystaczy podstawić $m=3$ i $n=2$ w ($\heartsuit$).

4° Każdy element zbioru Z jest nie większy od $1/12$.

Istotnie, z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $4m^2$ i $9n^2$ otrzymujemy

$$\sqrt{4m^2\cdot 9n^2}\leqslant\frac{4m^2+9n^2}{2},$$

co łatwo przekształcamy do postaci

$$\frac{mn}{4m^2+9n^2}\leqslant\frac{1}{12}.$$

Na podstawie spostrzeżeń **1**° i **2**° stwierdzamy, że $\inf Z=0$, a ze spostrzeżeń **3**° i **4**° wynika $\sup Z=1/12$.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 0, a kres górny 1/12.

198. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kres górny zbioru

$$Z=\left\{\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}:k,m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną zastosowanej do liczb $8k^3$, $27m^3$, $125n^3$ otrzymujemy

$$\sqrt[3]{8k^3\cdot 27m^3\cdot 125n^3}\leqslant\frac{8k^3+27m^3+125n^3}{3},$$

czyli

$$\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}\leqslant\frac{1}{90}.$$

Zatem liczba $1/90$ jest ograniczeniem górnym zbioru Z. Wykażemy, że jest to ograniczenie najmniejsze. W tym celu przyjmijmy $k=15$, $m=10$ oraz $n=6$. Wówczas

$$\frac{kmn}{8k^3+27m^3+125n^3}=\frac{900}{27000+27000+27000}=\frac{1}{90}$$

jest elementem zbioru Z.

Odpowiedź: Kres górny zbioru Z jest równy $1/90$.

199. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+5n+3}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+5n+3}-n=\sqrt{n^2+5n+3}-\left(n+\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}=\frac{n^2+5n+3-\left(n+\frac{5}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+5n+3}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{n^2+5n+3-n^2-5n-\frac{25}{4}}{\sqrt{n^2+5n+3}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=-\frac{13/4}{\sqrt{n^2+5n+3}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}.$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie rośnie wraz z n, a przy $n\to\infty$ dąży do $5/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu rosnącym pierwszy wyraz (tu równy 2) jest najmniejszy, a kresem górnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy 2, a kres górny $5/2$.

200. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\sqrt{n^2+5n+10}-n:\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcając wyrażenie definiujące dany w zadaniu zbiór otrzymujemy:

$$\sqrt{n^2+5n+10}-n=\sqrt{n^2+5n+10}-\left(n+\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{2}=\frac{n^2+5n+10-\left(n+\frac{5}{2}\right)^2}{\sqrt{n^2+5n+10}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{n^2+5n+10-n^2-5n-\frac{25}{4}}{\sqrt{n^2+5n+10}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}=\frac{15/4}{\sqrt{n^2+5n+10}+\left(n+\frac{5}{2}\right)}+\frac{5}{2}.$$

Z otrzymanej postaci wynika, że podane wyrażenie maleje wraz z n, a przy $n\to\infty$ dąży do $5/2$.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy odnotować, że w ciągu malejącym pierwszy wyraz (tu równy 3) jest największy, a kresem dolnym zbioru wyrazów jest granica ciągu.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $5/2$, a kres górny 3.

201. Wyznaczyć (wraz z uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{5^m-3^n} : m,n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=5^m-3^n>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia i parzysta, musi zachodzić $k\geqslant 2$. Zauważmy przy tym, że dla $m=n=1$ w istocie $k=2$. Zatem liczba $1/2$ jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=5^m-3^n<0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna i parzysta, musi zachodzić $k\leqslant -2$. Zauważmy przy tym, że dla $m=2$, $n=3$ w istocie $k=25-27=-2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny $1/2$.

202. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{m^2-3n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-3n^2>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k\geqslant 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m=2$ i $n=1$ w istocie $k=1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-3n^2<0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k, czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k\not\equiv 2\ (\ (\mathrm{mod}\ 3))$, musi zachodzić $k\neq -1$. W konsekwencji $k\leqslant -2$. Zauważmy ponadto, że dla $m=n=1$ otrzymujemy $k=-2$. Zatem liczba $-1/2$ jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 3 reszty 2.* Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k=m^2-3n^2\equiv m^2\not\equiv 2\ (\ (\mathrm{mod}\ 3)) .$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy $-1/2$, a kres górny 1.

203. Wyznaczyć (wraz z pełnym uzasadnieniem) kresy zbioru

$$\left\{\frac{1}{m^2-7n^2} : m,n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Rozwiązanie:

Każdy dodatni element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-7n^2>0$. Największy element otrzymamy dla najmniejszej możliwej dodatniej liczby k. Ponieważ liczba k jest całkowita dodatnia, musi zachodzić $k \geqslant 1$. Zauważmy przy tym, że dla $m=8$ i $n=3$ w istocie $k=1$. Zatem liczba 1 jest największym elementem zbioru.

Podobnie, każdy ujemny element zbioru jest postaci $1/k$, gdzie $k=m^2-7n^2<0$. Najmniejszy element otrzymamy dla największej możliwej ujemnej liczby k, czyli dla ujemnej liczby k o najmniejszym module. Ponieważ liczba k jest całkowita ujemna, a przy tym $k \not\equiv 6 \pmod 7$ oraz $k \not\equiv 5 \pmod 7$, musi zachodzić $k \neq -1$ oraz $k \neq -2$. W konsekwencji $k \leqslant -3$. Zauważmy ponadto, że dla $m=2$ i $n=1$ otrzymujemy $k=-3$. Zatem liczba –1/3 jest najmniejszym elementem zbioru.

W rozwiązaniu korzystamy z następującego faktu: *Kwadrat liczby całkowitej nigdy nie daje przy dzieleniu przez 7 reszty 3, 5 ani 6.* Na tej właśnie podstawie wnioskujemy, że

$$k=m^2-7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 5 \pmod 7$$

oraz

$$k=m^2-7n^2 \equiv m^2 \not\equiv 6 \pmod 7 .$$

Dowód powyższego faktu sprowadza się do następujących tożsamości:

$$(7t)^2 = 7\cdot\left(7t^2\right)+0\,,$$

$$(7t\pm 1)^2 = 7\cdot\left(7t^2\pm 2t\right)+1\,,$$

$$(7t\pm 2)^2 = 7\cdot\left(7t^2\pm 4t\right)+4\,,$$

$$(7t\pm 3)^2 = 7\cdot\left(7t^2\pm 6t+1\right)+2\,.$$

Odpowiedź: Kres dolny danego zbioru jest równy –1/3, a kres górny 1.