**126.** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n+2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n+3}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}\right).$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez $b_n$. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania $b_n$ od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 9 przy $n$ dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+n}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+n}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+n}}=$$

$$=\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+9n}{\sqrt{n^4+n}}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n\geqslant\frac{n}{\sqrt{n^4+9n}}+\frac{n+1}{\sqrt{n^4+9n}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+9n}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+9n}}+\ldots+\frac{9n}{\sqrt{n^4+9n}}=$$

$$=\frac{n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+9n}{\sqrt{n^4+9n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+9n=(8n+1)\cdot\frac{n+9n}{2}=5n\cdot(8n+1)\,,$$

gdzie $8n+1$ jest liczbą wyrazów powyższego postępu.

Wobec tego

$$c_n=\frac{5n\cdot(8n+1)}{\sqrt{n^4+n}}=\frac{5\cdot\left(8+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}\to 40$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{5n\cdot(8n+1)}{\sqrt{n^4+9n}}=\frac{5\cdot\left(8+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{9}{n^3}}}\to 40\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 40$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 40\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 40\,.$$

**Odpowiedź:** Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 40.

**127.** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+4n+3}}+\frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+4n+6}}+\frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+4n+9}}+\frac{4n+12}{\sqrt{4n^4+4n+12}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{13n-9}{\sqrt{4n^4+13n-9}}+\frac{13n-6}{\sqrt{4n^4+13n-6}}+\frac{13n-3}{\sqrt{4n^4+13n-3}}+\frac{13n}{\sqrt{4n^4+13n}}\right).$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez $b_n$. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania $b_n$ od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 13/4 przy $n$ dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n \leqslant \frac{4n}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+4n}}+\frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+4n}}+\ldots+\frac{13n}{\sqrt{4n^4+4n}}=$$
$$=\frac{4n+(4n+3)+(4n+6)+(4n+9)+\ldots+13n}{\sqrt{4n^4+4n}}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n \geqslant \frac{4n}{\sqrt{4n^4+13n}}+\frac{4n+3}{\sqrt{4n^4+13n}}+\frac{4n+6}{\sqrt{4n^4+13n}}+\frac{4n+9}{\sqrt{4n^4+13n}}+\ldots+\frac{13n}{\sqrt{4n^4+13n}}=$$
$$=\frac{4n+(4n+3)+(4n+6)+(4n+9)+\ldots+13n}{\sqrt{4n^4+13n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$4n+(4n+3)+(4n+6)+(4n+9)+\ldots+13n=(3n+1)\cdot\frac{4n+13n}{2}=\frac{17n\cdot(3n+1)}{2}\,,$$

gdzie

$$3n+1=\frac{13n-4n}{3}+1$$

jest liczbą wyrazów powyższego postępu (o różnicy 3).

Wobec tego

$$c_n=\frac{17n\cdot(3n+1)}{2\cdot\sqrt{4n^4+4n}}=\frac{17\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}{2\cdot\sqrt{4+\frac{4}{n^3}}}\to\frac{51}{4}$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{17n\cdot(3n+1)}{2\cdot\sqrt{4n^4+13n}}=\frac{17\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}{2\cdot\sqrt{4+\frac{13}{n^3}}}\to\frac{51}{4}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{51}{4}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{51}{4}\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{51}{4}\,.$$

**Odpowiedź:** Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 51/4.

**128.** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{3^n+1}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n+2}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n+4}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n+8}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n+2^{n-2}}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n+2^{n-1}}+\frac{2^n}{3^n+2^n}\right)\,.$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez $b_n$. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania $b_n$ od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do 0 przy $n$ dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp geometryczny, którego sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n \leqslant \frac{3^n}{3^n}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}=$$
$$=\frac{3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 4+3^{n-3}\cdot 8+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-1}+2^n}{3^n}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n \geqslant \frac{3^n}{3^n+2^n}+\frac{3^{n-1}\cdot 2}{3^n+2^n}+\frac{3^{n-2}\cdot 4}{3^n+2^n}+\frac{3^{n-3}\cdot 8}{3^n+2^n}+\ldots+\frac{9\cdot 2^{n-2}}{3^n+2^n}+\frac{3\cdot 2^{n-1}}{3^n+2^n}+\frac{2^n}{3^n+2^n}=$$
$$=\frac{3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 4+3^{n-3}\cdot 8+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-1}+2^n}{3^n+2^n}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu geometrycznego otrzymujemy

$$3^n+3^{n-1}\cdot 2+3^{n-2}\cdot 4+3^{n-3}\cdot 8+\ldots+9\cdot 2^{n-2}+3\cdot 2^{n-1}+2^n=$$
$$=3^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=3^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}=3^{n+1}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=3^{n+1}-2^{n+1}\,,$$

gdyż iloraz powyższego postępu jest równy $2/3$, a $n+1$ jest liczbą wyrazów postępu.

Wobec tego

$$c_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 3-2\cdot 0=3$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}=\frac{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\to\frac{3-2\cdot 0}{1+0}=3\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=3$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=3\,.$$

**Odpowiedź:** Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 3.

**129.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\right).$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez $b_n$. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania $b_n$ od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do nieskończoności przy $n$ dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników) będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna: mianowniki oszacujemy przez wspólną wielkość, a liczniki, które tworzą postęp geometryczny, pozostawimy bez zmian.

Szacowanie od dołu (mianowniki od góry) prowadzi do:

$$b_n=\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2^n}{\sqrt{9^n+7^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+7^n}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+7^n}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+7^n}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}=$$

$$=\frac{2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry (mianowniki od dołu) otrzymujemy:

$$b_n=\frac{2^n}{\sqrt{9^n+5^n}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+5^{n-1}\cdot 7}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+5^{n-2}\cdot 7^2}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+5^{n-k}\cdot 7^k}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+7^n}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^n}{\sqrt{9^n+0}}+\frac{2^{n-1}\cdot 3}{\sqrt{9^n+0}}+\frac{2^{n-2}\cdot 3^2}{\sqrt{9^n+0}}+\ldots+\frac{2^{n-k}\cdot 3^k}{\sqrt{9^n+0}}+\ldots+\frac{3^n}{\sqrt{9^n+0}}=$$

$$=\frac{2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n}{3^n}=c_n\,.$$

W licznikach uzyskanych oszacowań występuje suma tego samego postępu geometrycznego $n+1$-wyrazowego o pierwszym wyrazie $2^n$ i ilorazie $3/2$. Mamy więc

$$2^n+2^{n-1}\cdot 3+2^{n-2}\cdot 3^2+\ldots+2^{n-k}\cdot 3^k+\ldots+3^n=2^n\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}=3^{n+1}-2^{n+1}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{\sqrt{9^n+7^n}}=\frac{3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{7}{9}\right)^n}}\to 3$$

oraz

$$c_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 3\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa 3.

**130.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt{n^6+1}}+\frac{(n+2)^2}{\sqrt{n^6+2}}+\frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+3}}+\ldots+\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^6+n-1}}+\frac{(2n)^2}{\sqrt{n^6+n}}\right).$$

*Wskazówka-przypomnienie:* $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez $b_n$. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania $b_n$ od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – iloraz ostatniego składnika do pierwszego dąży do czterech przy $n$ dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Będziemy więc szacować każdy składnik z osobna szacując mianowniki przez wspólną wielkość.

Szacowanie od dołu prowadzi do:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+n}}=\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2=a_n\,.$$

Z kolei szacując od góry otrzymujemy:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+k}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{\sqrt{n^6+0}}=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2=c_n\,.$$

Obliczamy sumę występującą we wzorach na $a_n$ i $c_n$:

$$\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2=\sum_{k=n+1}^{2n}k^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2n\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)}{6}-\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(7n+1)}{6}\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzą nierówności $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$, a ponadto przy $n\to\infty$ mamy

$$a_n=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(7n+1)}{6\cdot\sqrt{n^6+n}}\to\frac{7}{3}$$

oraz

$$c_n=\frac{n\cdot(2n+1)\cdot(7n+1)}{6\cdot n^3}\to\frac{7}{3}\,,$$

z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dana w zadaniu granica jest równa **7/3**.

**131.** Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+1}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+9}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+27}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^{n-1}}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}\right).$$

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez $b_n$. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania $b_n$ od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią – ilorazy środkowych składników do skrajnych dążą do nieskończoności przy $n$ dążącym do nieskończoności. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak $n$-ty wiersz trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n\leqslant\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+0}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+0}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+0}}=$$

$$=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}}{2^n}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n\geqslant\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\ldots+\frac{\binom{n}{n-1}}{\sqrt{4^n+3^n}}+\frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}=$$

$$=\frac{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}}{\sqrt{4^n+3^n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę wyrazów $n$-tego wiersza trójkąta Pascala otrzymujemy

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{2^n}{2^n}=1\to 1$$

przy $n\to\infty$ i podobnie

$$a_n=\frac{2^n}{\sqrt{4^n+3^n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}}\to 1\,.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto
$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$
oraz
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\,,$$
na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1\,.$$

**Odpowiedź:** Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa 1.

**132.** Obliczyć granicę ciągu zaczynającego się od wyrazu o indeksie 7:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}}+\frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}}+\frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}}+\frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}}+\ldots+\frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}}+\frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}\right)$$
dla tak dobranej wartości naturalnej parametru $k$, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

*Rozwiązanie:*

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez $b_n$. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania $b_n$ od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy przy $k\geqslant 2$ mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak początek siódmej kolumny trójkąta Pascala, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do
$$b_n=\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}}+\frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}}+\frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}}+\frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}}+\ldots+\frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}}+\frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\binom{7}{7}+\binom{8}{7}+\binom{9}{7}+\binom{10}{7}+\ldots+\binom{n-1}{7}+\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+0}}=$$
$$=\frac{\binom{7}{7}+\binom{8}{7}+\binom{9}{7}+\binom{10}{7}+\ldots+\binom{n-1}{7}+\binom{n}{7}}{n^{k/2}}=c_n$$
Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do
$$b_n=\frac{\binom{7}{7}}{\sqrt{n^k+7}}+\frac{\binom{8}{7}}{\sqrt{n^k+8}}+\frac{\binom{9}{7}}{\sqrt{n^k+9}}+\frac{\binom{10}{7}}{\sqrt{n^k+10}}+\ldots+\frac{\binom{n-1}{7}}{\sqrt{n^k+n-1}}+\frac{\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\binom{7}{7}+\binom{8}{7}+\binom{9}{7}+\binom{10}{7}+\ldots+\binom{n-1}{7}+\binom{n}{7}}{\sqrt{n^k+n}}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę początkowych wyrazów kolumny trójkąta Pascala[1] otrzymujemy

$$\binom{7}{7}+\binom{8}{7}+\binom{9}{7}+\binom{10}{7}+\ldots+\binom{n-1}{7}+\binom{n}{7}=\binom{n+1}{8}.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{\binom{n+1}{8}}{n^{k/2}}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot(n-6)/8!}{n^{k/2}}\to\frac{1}{8!}$$

przy $n\to\infty$, o ile $k=16$. Podobnie

$$a_n=\frac{\binom{n+1}{8}}{\sqrt{n^k+n}}=\frac{(n+1)\cdot n\cdot\ldots\cdot(n-6)/8!}{n^{k/2}\cdot\sqrt{1+n^{1-k}}}\to\frac{1}{8!}$$

przy $n\to\infty$, o ile $k=16$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}c_n=1/8!$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1/8!\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}b_n=1/8!\,.$$

**Odpowiedź:** Granica podana w treści zadania ma dla $k=16$ wartość $1/8!=1/40320$.

---

[1] Wzór ten mówi, że

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

i może być udowodniony indukcyjnie ze względu na $n$. Można też zapisać

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}=\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}$$

i wielokrotnie zastosować do początkowych składników wzór $\binom{a}{b}+\binom{a}{b+1}=\binom{a+1}{b+1}$.