

94. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ w liczniku ułamka pod znakiem granicy występuje różnica wyrażeń podobnej wielkości ($\approx n^3$), stosujemy na poziomie licznika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Ponieważ w mianowniku tegoż ułamka występuje różnica wyrażeń **różnego rzędu wielkości** ($\approx n^{3/2}$ oraz $\approx n^2$), stosowanie jakiegokolwiek wzoru skróconego mnożenia jest zbyteczne, a nawet szkodliwe, bo prowadzi do skomplikowania rachunków.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + n^5 + 1 - n^6}{\left(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2\right) \cdot \left(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} + n^2\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 1}{\left(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2\right) \cdot \left(\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} + n^2\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^{-5}}{\left(\sqrt[4]{n^{-2} + n^{-3} + n^{-8}} - 1\right) \cdot \left(\sqrt[4]{n^{-2} + n^{-3} + n^{-8}} + 1\right)} = \\ &= \frac{1 + 0}{\left(\sqrt[4]{0 + 0 + 0} - 1\right) \cdot \left(\sqrt[4]{0 + 0 + 0} + 1\right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-1/2$.

95. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8\right)^5}.$$

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8\right)^3}{\left(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8\right)^5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{\sqrt{n^{16} + n^3} + n^8}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{16} + n^5} + n^8}{n^5}\right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{-5}}{\sqrt{1 + n^{-13}} + 1}\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1}{n^{-3}}\right)^5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + n^{-11}} + 1\right)^5}{\left(\sqrt{1 + n^{-13}} + 1\right)^3} \cdot \frac{n^{-15}}{n^{-15}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+n^{-11}}+1)^5}{(\sqrt{1+n^{-13}}+1)^3} = \frac{(\sqrt{1+0}+1)^5}{(\sqrt{1+0}+1)^3} = \frac{2^5}{2^3} = 4.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 4.

96. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6)^2}{(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9)^5}.$$

Rozwiązanie:

Stosując w mianowniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b},$$

a w liczniku wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^{18}+n^7}-n^6)^2}{(\sqrt{n^{18}+n^7}-n^9)^5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^7}{(n^{18}+n^7)^{2/3} + n^6 \cdot (n^{18}+n^7)^{1/3} + n^{12}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{n^{18}+n^7}+n^9}{n^7} \right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{-5}}{(1+n^{-11})^{2/3} + (1+n^{-11})^{1/3} + 1} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+n^{-11}}+1}{n^{-2}} \right)^5 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+n^{-11}}+1)^5}{((1+n^{-11})^{2/3} + (1+n^{-11})^{1/3} + 1)^2} \cdot \frac{n^{-10}}{n^{-10}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1+n^{-11}}+1)^5}{((1+n^{-11})^{2/3} + (1+n^{-11})^{1/3} + 1)^2} = \frac{(\sqrt{1+0}+1)^5}{((1+0)^{2/3} + (1+0)^{1/3} + 1)^2} = \frac{2^5}{3^2} = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 32/9.

97. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12}+n}-n^6}{(\sqrt{n^4+n}-n^2)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12} + n} - n^6}{(\sqrt{n^4 + n} - n^2)^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^{12} + n} + n^6} \cdot \left(\frac{\sqrt{n^4 + n} + n^2}{n} \right)^k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-5}}{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + n^{-3}} + 1}{n^{-1}} \right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1 + n^{-3}} + 1)^k}{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1} \cdot \frac{n^{-5}}{n^{-k}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1 + n^{-3}} + 1)^k}{\sqrt{1 + n^{-11}} + 1} \cdot n^{k-5} = \frac{2^k}{2} = 2^{k-1}, \end{aligned}$$

o ile $k - 5 = 0$, czyli $k = 5$.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 16 dla $k = 5$.

98. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy występujące pod znakiem granicy wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażen zbliżonej wielkości, a następnie dzielimy licznik i mianownik przez n^9 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^9 + 1}{n^k \cdot (\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} + n^7)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + n^{-9}}{n^{k-2} \cdot (\sqrt{1 + 9n^{-5} + n^{-14}} + 1)}. \end{aligned}$$

Dla $k = 2$ otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 + n^{-9}}{\sqrt{1 + 9n^{-5} + n^{-14}} + 1} = \frac{9 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{9}{2}.$$

Odpowiedź: Przy $k = 2$ granica jest równa $9/2$.

Uwaga: Liczba $k = 2$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania. Jednak zgodnie z poleceniem wystarczyło wskazać k , bez konieczności uzasadnienia, że takie k jest tylko jedno.

99. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot (\sqrt{n^{666} + 1} - n^{333}) \right)$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów w postaci $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt{n^{666} + 1} - n^{333})) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \frac{1}{\sqrt{n^{666} + 1} + n^{333}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\sqrt{n^{666} + 1} + n^{333}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{333} \cdot (\sqrt{1 + n^{-666}} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-333}}{\sqrt{1 + n^{-666}} + 1}. \end{aligned}$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 2 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k = 333$. Dla $k = 333$ mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-333}}{\sqrt{1 + n^{-666}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + n^{-666}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Dla $k = 333$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/2$.

100. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt[4]{n^{888} + 1} - n^{222}))$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt[4]{n^{888} + 1} - n^{222})) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \frac{1}{(\sqrt[4]{n^{888} + 1} + n^{222}) \cdot (\sqrt{n^{888} + 1} + n^{444})} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(\sqrt[4]{n^{888} + 1} + n^{222}) \cdot (\sqrt{n^{888} + 1} + n^{444})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{666} \cdot (\sqrt[4]{1 + n^{-888}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + n^{-888}} + 1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-666}}{(\sqrt[4]{1 + n^{-888}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + n^{-888}} + 1)}. \end{aligned}$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 4 przy n dążącym do nieskończoności, natomiast licznik jest równy 1, gdy $k = 666$. Dla $k = 666$ mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-666}}{(\sqrt[4]{1 + n^{-888}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + n^{-888}} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[4]{1 + n^{-888}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + n^{-888}} + 1)} = \frac{1}{4}.$$

Odpowiedź: Dla $k = 666$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/4$.

101. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^{666} + n^k} - n^{222})$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów w postaci

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

przekształcamy daną w treści zadania granicę w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^{666} + n^k} - n^{222}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(n^{666} + n^k)^{2/3} + n^{222} \cdot (n^{666} + n^k)^{1/3} + n^{444}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-444}}{(1 + n^{k-666})^{2/3} + (1 + n^{k-666})^{1/3} + 1}. \end{aligned}$$

Mianownik ostatniego wyrażenia pod znakiem granicy dąży do 3 przy n dążącym do nieskończoności (o ile $k < 666$), natomiast licznik jest równy 1, gdy $k = 444$.

Dla $k = 444$ mamy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-444}}{(1 + n^{k-666})^{2/3} + (1 + n^{k-666})^{1/3} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + n^{-222})^{2/3} + (1 + n^{-222})^{1/3} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Dla $k = 444$ dana w zadaniu granica ma wartość $1/3$.

102. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n).$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - (n^2 + 3n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 6n^3 - (n^2 + 3n)^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 6n^3 - n^4 - 6n^3 - 9n^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9n^2}{\sqrt{n^4 + 6n^3} + n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9}{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1 + \frac{3}{n}} = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość $-9/2$.

103. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n}{3} \right) = 1/6 \quad \text{dla } k = -3$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n+4}{n} \right) = 1/24 \quad \text{dla } k = -4$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n}{4} \right) = 2/3 \quad \text{dla } k = -4$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2}{5} \right) = 4/15 \quad \text{dla } k = -5$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2020}{6} \right) = 4/45 \quad \text{dla } k = -6$$

104. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{2} \right) = 1/8 \quad \text{dla } k = -4$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{2} \right) = 2 \quad \text{dla } k = -4$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{3} \right) = 1/48 \quad \text{dla } k = -6$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{3} \right) = 4/3 \quad \text{dla } k = -6$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{3}}{2} \right) = 1/72 \quad \text{dla } k = -6$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{4} \right) = 2/3 \quad \text{dla } k = -8$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{4}}{3} \right) = 4/81 \quad \text{dla } k = -12$$

105. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^3} + \frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^3+2} + \frac{n}{n^3+3} + \frac{n}{n^3+4} + \frac{n}{n^3+5} + \frac{n}{n^3+6} + \dots + \frac{n}{(n+1)^3} \right).$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $3n^2 + 3n + 2$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n \leq (3n^2 + 3n + 2) \cdot \frac{n}{n^3} = c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geq (3n^2 + 3n + 2) \cdot \frac{n}{(n+1)^3} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 3n + 2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = 3$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 + 3n + 2) \cdot n}{(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = 3,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3.$$

106. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^5 + 1}{\sqrt{18n^{18} + 1}} + \frac{5n^5 + 2}{\sqrt{18n^{18} + 2}} + \frac{5n^5 + 3}{\sqrt{18n^{18} + 3}} + \frac{5n^5 + 4}{\sqrt{18n^{18} + 4}} + \dots + \frac{5n^5 + 4n^4}{\sqrt{18n^{18} + 4n^4}} \right).$$

Rozwiązanie:

Dana pod znakiem granicy suma ma $4n^4$ składników i zapisuje się wzorem

$$b_n = \sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + k}{\sqrt{18n^{18} + k}}.$$

Szacowanie od góry daje

$$\sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + k}{\sqrt{18n^{18} + k}} \leq \sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + 4n^4}{\sqrt{18n^{18} + 0}} = \frac{4n^4 (5n^5 + 4n^4)}{3\sqrt{2} \cdot n^9} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + k}{\sqrt{18n^{18} + k}} \geq \sum_{k=1}^{4n^4} \frac{5n^5 + 0}{\sqrt{18n^{18} + 4n^4}} = \frac{4n^4 \cdot 5n^5}{\sqrt{18n^{18} + 4n^4}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n^9}{\sqrt{18n^{18} + 4n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{\sqrt{18 + 4n^{-14}}} = \frac{20}{\sqrt{18}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 \cdot (5n^5 + 4n^4)}{3\sqrt{2} \cdot n^9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot (5 + 4n^{-1})}{3\sqrt{2}} = \frac{20}{3\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{3},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa $\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

107. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^7 + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^7 + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^7 + n^4 + 2} + \frac{n^4 + 3}{n^7 + n^4 + 3} + \frac{n^4 + 4}{n^7 + n^4 + 4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^7 + (n+1)^4} \right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+1)^4 - n^4 + 1 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 2$ składników. Szacujemy ją od góry przez iloczyn liczby składników i wspólnego górnego oszacowania składników:

$$\frac{n^4}{n^7 + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^7 + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^7 + n^4 + 2} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^7 + (n+1)^4} \leq (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{(n+1)^4}{n^7 + 0}$$

i analogicznie od dołu:

$$\frac{n^4}{n^7 + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^7 + n^4 + 1} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^7 + (n+1)^4} \geq (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^7 + (n+1)^4}.$$

Następnie kolejno obliczamy granice przy $n \rightarrow \infty$ oszacowań górnego i dolnego:

$$\frac{(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot (n+1)^4}{n^7} = (4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}) \cdot (1 + n^{-1})^4 \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^7 + (n+1)^4} = \frac{4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}}{1 + (1 + n^{-1})^4 \cdot n^{-3}} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

108. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}} + \frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}} + \frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}} + \dots + \frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} \right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że ostatni składnik danej w zadaniu sumy można zapisać jako

$$\frac{\sqrt{n^3+3n^2+3n+1}}{\sqrt{49n^7-1}},$$

skąd wynika, że ma ona $3n^2+3n+1$ składników.

Oznaczmy sumę występującą w treści zadania przez b_n i oszacujemy ją od góry przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od góry, mianowniki od dołu) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczmy uzyskane oszacowanie przez c_n .

$$b_n \leq (3n^2+3n+1) \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} = c_n.$$

Postępując analogicznie oszacujemy daną sumę od dołu przez wspólne oszacowanie składników (liczniki od dołu, mianowniki od góry) przemnożone przez liczbę składników. Oznaczmy uzyskane oszacowanie przez a_n .

$$b_n \geq (3n^2+3n+1) \cdot \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}} = a_n.$$

Obliczając granice ciągów (a_n) i (c_n) otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2+3n+1) \cdot \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3+3n^{-1}+n^{-2}) \cdot \frac{\sqrt{1+n^{-3}}}{\sqrt{49+n^{-7}}} = \frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2+3n+1) \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3+3n^{-1}+n^{-2}) \cdot \frac{\sqrt{(1+n^{-1})^3}}{\sqrt{49-n^{-7}}} = \frac{3}{7}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3}{7}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{7},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{7}.$$

Odpowiedź: Wartość granicy podanej w treści zadania jest równa $3/7$.

109. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}} + \frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}} + \frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}} + \frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}} + \dots + \frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} \right).$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+3)^3 - n^2 + 1 = 6n + 10$ wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$(6n+10) \cdot \frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} \leq \sum_{k=0}^{6n+9} \frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}} \leq (6n+10) \cdot \frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n+10) \cdot \frac{n^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} = \left(6 + \frac{10}{n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^6 + \frac{1}{n^6}}} \rightarrow 6$$

oraz

$$(6n+10) \cdot \frac{(n+3)^2}{\sqrt{n^6+1}} = \left(6 + \frac{10}{n}\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^6}}} \rightarrow 6.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

110. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} \right).$$

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} = \frac{\sqrt{n^2+8n+16}}{\sqrt{n^4+6n^3+9n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+2 \cdot (4n+8)}}{\sqrt{n^4+2n^3+n^2+4n^3+8n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+2 \cdot (4n+8)}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2 \cdot (4n+8)}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{4n+8} \frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}}$$

i w konsekwencji ma $4n+9$ składników. Szacujemy ją obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+9) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} \leq \sum_{k=0}^{4n+8} \frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}} \leq (4n+9) \cdot \frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+9) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} = \frac{(4n+9) \cdot n}{n^2+3n} = \frac{4+\frac{9}{n}}{1+\frac{3}{n}} \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n+9) \cdot \frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}} = \frac{(4n+9) \cdot (n+4)}{n^2+n} = \frac{(4+\frac{9}{n}) \cdot (1+\frac{4}{n})}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

111. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+n^3-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+1-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+2-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+3-n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k-n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-2-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-1-n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+n-n^2}} \right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy i szacujemy wyrażenie pod znakiem granicy (uwzględniając, że jest to suma złożona z $n+1$ składników), a następnie przechodzimy z n do $+\infty$ w oszacowaniach dolnym i górnym:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^4+n^3+k-n^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n^4+n^3+k+n^2}}{n^4+n^3+k-n^4} = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n^4+n^3+k+n^2}}{n^3+k}, \\ \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n^4+n^3+k+n^2}}{n^3+k} \geq (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n^4+0+0+n^2}}{n^3+n} \rightarrow 2, \\ \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{n^4+n^3+k+n^2}}{n^3+k} \leq (n+1) \cdot \frac{\sqrt{n^4+n^3+n+n^2}}{n^3+0} \rightarrow 2.$$

Ponieważ oszacowania dolne i górne dążą do wspólnej granicy równej 2, na mocy twierdzenia o trzech ciągach dana w zadaniu granica istnieje i ma wartość 2.

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ma wartość 2.

112. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2+4} + \sqrt[3]{n^2+8} + \sqrt[3]{n^2+12} + \sqrt[3]{n^2+16} + \sqrt[3]{n^2+20} + \dots + \sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2+3} + \sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{n^2+9} + \sqrt[3]{n^2+12} + \sqrt[3]{n^2+15} + \dots + \sqrt[3]{(n+3)^2}}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez b_n wyrażenie znajdujące się pod znakiem granicy.

Suma w liczniku tego wyrażenia zapisuje się wzorem

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sqrt[3]{n^2+4k},$$

ma więc $n+2$ składniki. Górny zakres sumowania ustaliliśmy z równości

$$n^2+4k = (n+2)^2 = n^2+4n+4 = n^2+4(n+1)$$

otrzymanej dla wyrażenia pod pierwiastkiem ostatniego składnika sumy.

Podobnie, suma w mianowniku wyrażenia b_n zapisuje się wzorem

$$\sum_{k=0}^{2n+3} \sqrt[3]{n^2+3k},$$

ma więc $2n+4$ składniki. Górny zakres sumowania ustaliliśmy z równości

$$n^2+3k = (n+3)^2 = n^2+6n+9 = n^2+3(2n+3)$$

otrzymanej dla wyrażenia pod pierwiastkiem ostatniego składnika sumy.

Szacowanie od góry daje

$$b_n \leq \frac{(n+2) \cdot \sqrt[3]{(n+2)^2}}{(2n+4) \cdot \sqrt[3]{n^2}} = \frac{\sqrt[3]{(n+2)^2}}{2 \cdot \sqrt[3]{n^2}} = c_n.$$

Szacując od dołu otrzymujemy

$$b_n \geq \frac{(n+2) \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(2n+4) \cdot \sqrt[3]{(n+3)^2}} = \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2 \cdot \sqrt[3]{(n+3)^2}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{2 \cdot \sqrt[3]{(n+3)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}} = \frac{1}{2}$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(n+2)^2}}{2 \cdot \sqrt[3]{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}}{2} = \frac{1}{2},$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica istnieje i jest równa $1/2$.

113. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^7 + 9} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^7 + 16} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 5}}{n^7 + 25} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^3 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^7 + n^6} \leq \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \leq n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + 0},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^7 + n^6} = \frac{\sqrt{k \cdot n^k}}{n^4 + n^3} = \frac{\sqrt{k \cdot n^{k/2}}}{n^4 + n^3} = \frac{\sqrt{k \cdot n^{k/2-4}}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 4 = 0$, czyli $k = 8$.

$$n^3 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7} = \sqrt{k \cdot n^{k/2-4} + \frac{1}{n^5}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 4 = 0$, czyli $k = 8$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 8$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

114. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^p + 1}{\sqrt{900n^{900} + 1}} + \frac{n^p + 8}{\sqrt{900n^{900} + 32}} + \dots + \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} + \dots + \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $2n^6$ składników. Szacujemy ją obustronnie:

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 0}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \leq \sum_{k=1}^{2n^6} \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} \leq 2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 0}} = 2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{30n^{450}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego.

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 0}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} = \frac{2n^{p+6}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} = \frac{2n^{p-444}}{\sqrt{900 + 32n^{-870}}} \rightarrow \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{900 + 0}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15},$$

o ile $p - 444 = 0$, czyli $p = 444$.

$$2n^6 \cdot \frac{n^p + 8n^{18}}{30n^{450}} = \frac{2n^{p+6} + 16n^{24}}{30n^{450}} = \frac{2n^{p-444} + 16n^{-426}}{30} \rightarrow \frac{2 \cdot 1 + 0}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15},$$

o ile $p - 444 = 0$, czyli $p = 444$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $p = 444$ dana w zadaniu granica jest równa $1/15$.

115. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 1}}{n^{13+1}} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 2}}{n^{13+4}} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 3}}{n^{13+9}} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 4}}{n^{13+16}} + \dots + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13+n^8}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^4 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^4 \cdot \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 0}}{n^{13+n^8}} \leq \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 1}}{n^{13+1}} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 2}}{n^{13+4}} + \dots + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13+n^8}} \leq n^4 \cdot \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13+0}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

$$n^4 \cdot \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 0}}{n^{13+n^8}} = \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k}}{n^9+n^4} = \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^{k/3}}}{n^9+n^4} = \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^{k/3-9}}}{1+\frac{1}{n^5}} \rightarrow \sqrt[3]{k},$$

o ile $k/3 - 9 = 0$, czyli $k = 27$.

$$n^4 \cdot \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13}} = \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^9} = \sqrt[3]{k \cdot n^{k-27} + \frac{1}{n^{23}}} \rightarrow \sqrt[3]{k},$$

o ile $k - 27 = 0$, czyli $k = 27$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 27$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 3.

116. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^{13+1}} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^{13+2}} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^{13+3}} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^{13+4}} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13+n^5}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma n^5 wyrazów. Szacujemy ją obustronnie:

$$n^5 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^{13+n^5}} \leq \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^{13+1}} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^{13+2}} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13+n^5}} \leq n^5 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13+0}},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

$$n^5 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 0}}{n^{13+n^5}} = \frac{\sqrt{k \cdot n^k}}{n^8+1} = \frac{\sqrt{k \cdot n^{k/2}}}{n^8+1} = \frac{\sqrt{k \cdot n^{k/2-8}}}{1+\frac{1}{n^8}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k/2 - 8 = 0$, czyli $k = 16$.

$$n^5 \cdot \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13+0}} = \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^8} = \sqrt{k \cdot n^{k-16} + \frac{1}{n^{11}}} \rightarrow \sqrt{k},$$

o ile $k - 16 = 0$, czyli $k = 16$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 16$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

117. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^k + n^4 + 2} + \frac{n^4 + 3}{n^k + n^4 + 3} + \frac{n^4 + 4}{n^k + n^4 + 4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że dana w zadaniu suma ma $(n+1)^4 - n^4 + 1 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 2$ składników. Szacujemy ją od góry przez iloczyn liczby składników i wspólnego górnego oszacowania składników:

$$\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^k + n^4 + 2} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \leq (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{(n+1)^4}{n^k + 0}$$

i analogicznie od dołu:

$$\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \geq (4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^k + (n+1)^4}.$$

Następnie kolejno obliczamy granice przy $n \rightarrow \infty$ oszacowań górnego i dolnego.

$$\frac{(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot (n+1)^4}{n^k} = \frac{(4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}) \cdot (1 + n^{-1})^4}{n^{k-7}} \rightarrow 4,$$

o ile $k = 7$.

$$(4n^3 + 6n^2 + 4n + 2) \cdot \frac{n^4}{n^k + (n+1)^4} = \frac{4 + 6n^{-1} + 4n^{-2} + 2n^{-3}}{n^{k-7} + (1 + n^{-1})^4 \cdot n^{-3}} \rightarrow 4,$$

o ile $k = 7$.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że dla $k = 7$ granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

118. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{\sqrt{n^p + k}}{n^7 + k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n i zauważmy, że ma ona $n^3 - n^2 + 1$ składników.

Zachodzą wówczas oszacowania od góry

$$b_n \leq (n^3 - n^2 + 1) \cdot \frac{\sqrt{n^p + n^3}}{n^7 + n^4} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^{p-8} + \frac{1}{n^5}}}{1 + \frac{1}{n^3}} = c_n$$

oraz od dołu

$$b_n \geq (n^3 - n^2 + 1) \cdot \frac{\sqrt{n^p + n^2}}{n^7 + n^6} = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^{p-8} + \frac{1}{n^6}}}{1 + \frac{1}{n}} = a_n.$$

Ponieważ dla dowolnego n zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

a ponadto dla $p = 8$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$$

Odpowiedź: Dla $p = 8$ wartość granicy jest równa 1.

119. a) Dobrać takie liczby całkowite $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie **b)** miało sens.

b) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+3 \cdot \frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2n+1+2 \cdot \frac{2(B-1)n+B^2-1}{2}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k}, \quad (1)$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{3} = \frac{2(B-1)n+B^2-1}{2}, \quad (2)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2 \cdot (2An+A^2) = 3 \cdot (2(B-1)n+B^2-1), \\ 4An+2A^2 = 6(B-1)n+3(B^2-1). \quad (3)$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 4A &= 6(B-1) \\ 2A^2 &= 3(B^2-1) \end{cases} \\ \begin{cases} 2A &= 3(B-1) \\ 2A^2 &= 3(B-1)(B+1) \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $A = B + 1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$2B + 2 = 3B - 3,$$

skąd $B = 5$ i $A = 6$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n) = 4n + 12.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n + 13$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n + 13) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2} \leq \sum_{k=0}^{4n+12} \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} \leq (4n+13) \cdot \frac{\sqrt{(n+6)^2}}{(n+1)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+13) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+5)^2} = \frac{(4n+13) \cdot n}{(n+5)^2} = \frac{4 + \frac{13}{n}}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2} \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n+13) \cdot \frac{\sqrt{(n+6)^2}}{(n+1)^2} = \frac{(4n+13) \cdot (n+6)}{(n+1)^2} = \frac{\left(4 + \frac{13}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{6}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 6$, $B = 5$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

120. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+3)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+3)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+3)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+3)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+3)^2+8} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 3$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+5 \cdot \frac{2An+A^2}{5}}}{n^2+6n+9+2(B-3)n+B^2-9} = \\ = \frac{\sqrt{n^2+5 \cdot \frac{2An+A^2}{5}}}{(n+3)^2+2 \cdot \left((B-3)n + \frac{B^2-9}{2}\right)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k}, \quad (4)$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An + A^2}{5} = (B-3)n + \frac{B^2-9}{2}, \quad (5)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (5) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (5) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2An + A^2) &= 5 \cdot (2(B-3)n + B^2 - 9), \\ 4An + 2A^2 &= 10(B-3)n + 5(B^2 - 9). \end{aligned} \quad (6)$$

Aby równość (6) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 4A &= 10(B-3) \\ 2A^2 &= 5(B^2-9) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2A &= 5(B-3) \\ 2A^2 &= 5(B-3)(B+3) \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie układu (7) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A > 0$ i $B > 3$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A = B + 3$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$2B + 6 = 5B - 15,$$

skąd $B = 7$ i $A = 10$. Wstawiając te wartości do równości (5) otrzymujemy

$$N(n) = 4n + 20.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $4n + 21$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (4) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n+21) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2} \leq \sum_{k=0}^{4n+21} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k} \leq (4n+21) \cdot \frac{\sqrt{(n+10)^2}}{(n+3)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n+21) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+7)^2} = \frac{(4n+21) \cdot n}{(n+7)^2} = \frac{4 + \frac{21}{n}}{\left(1 + \frac{7}{n}\right)^2} \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n+21) \cdot \frac{\sqrt{(n+10)^2}}{(n+3)^2} = \frac{(4n+21) \cdot (n+10)}{(n+3)^2} = \frac{\left(4 + \frac{21}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{10}{n}\right)}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 10$, $B = 7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

121. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B < 6$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+12n+36} = \frac{\sqrt{n^2+3 \cdot \frac{2An+A^2}{3}}}{n^2+2Bn+B^2+(2(6-B)n+36-B^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k}, \quad (8)$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{3} = 2(6-B)n+36-B^2, \quad (9)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (9) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (9) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$2An+A^2 = 3 \cdot (2(6-B)n+36-B^2), \\ 2An+A^2 = 6(6-B)n+3(36-B^2). \quad (10)$$

Aby równość (10) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2A = 6(6-B) \\ A^2 = 3(36-B^2) \end{cases} \\ \begin{cases} A = 3(6-B) \\ A^2 = 3(6-B)(6+B) \end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze¹ otrzymujemy $A=6+B$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$6+B = 18-3B,$$

¹Z warunków podanych w treści zadania $A > 0$ i $B < 6$, skąd wynika, że obie strony pierwszego równania są dodatnie, a więc niezerowe.

skąd $B = 3$ i $A = 9$. Wstawiając te wartości do równości (9) otrzymujemy

$$N(n) = 6n + 27.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $6n + 28$ składników.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (8) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(6n + 28) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} \leq \sum_{k=0}^{6n+27} \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+3)^2+k} \leq (6n + 28) \cdot \frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+3)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(6n + 28) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} = \frac{(6n + 28) \cdot n}{(n+6)^2} = \frac{6 + \frac{28}{n}}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^2} \rightarrow 6$$

oraz

$$(6n + 28) \cdot \frac{\sqrt{(n+9)^2}}{(n+3)^2} = \frac{(6n + 28) \cdot (n+9)}{(n+3)^2} = \frac{\left(6 + \frac{28}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{9}{n}\right)}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2} \rightarrow 6.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 6.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 9$, $B = 3$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 6.

122. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2}} + \frac{n^2+5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2}} + \frac{n^2+10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+4}} + \frac{n^2+15}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+6}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2k}} + \dots + \frac{(n+10)^2-10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-4}} + \frac{(n+10)^2-5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-2}} + \frac{(n+10)^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2}} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich $A < B$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{(n+10)^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2}} = \frac{n^2+20n+100}{n^2 \cdot \sqrt{n^2+2Bn+B^2}} = \frac{n^2+5 \cdot (4n+20)}{n^2 \cdot \sqrt{n^2+2An+A^2+2(B-A)n+B^2-A^2}} = \\ = \frac{n^2+5 \cdot (4n+20)}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2 \cdot \left((B-A)n + \frac{B^2-A^2}{2}\right)}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{n^2+5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2k}}, \quad (11)$$

gdzie

$$N(n) = 4n + 20 = (B - A)n + \frac{B^2 - A^2}{2}, \quad (12)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=4n+21$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (12) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (12) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 4n + 20 &= (B - A)n + \frac{B^2 - A^2}{2}, \\ 8n + 40 &= 2(B - A)n + B^2 - A^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Aby równość (13) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 8 &= 2(B - A) \\ 40 &= B^2 - A^2 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} 4 &= B - A \\ 40 &= (B - A)(B + A) \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie układu (14) przez pierwsze (w którym zgodnie z założoną nierównością $A < B$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy

$$10 = B + A,$$

skąd $A = 3$ i $B = 7$.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (11) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(4n + 21) \cdot \frac{n^2}{n^2 \cdot (n + 7)} \leq \sum_{k=0}^{4n+20} \frac{n^2 + 5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n+3)^2 + 2k}} \leq (4n + 21) \cdot \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot (n + 3)},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(4n + 21) \cdot \frac{n^2}{n^2 \cdot (n + 7)} = \frac{4 + \frac{21}{n}}{1 + \frac{7}{n}} \rightarrow 4$$

oraz

$$(4n + 21) \cdot \frac{(n + 10)^2}{n^2 \cdot (n + 3)} = \frac{\left(4 + \frac{21}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{10}{n}\right)^2}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow 4.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 4.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 3$, $B = 7$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 4.

123. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+5 \cdot \frac{2An+A^2}{5}}}{n^2+2n+1+2(B-1)n+B^2-1} = \\ = \frac{\sqrt{n^2+5 \cdot \frac{2An+A^2}{5}}}{(n+1)^2+3 \cdot \frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k}, \quad (15)$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{5} = \frac{2(B-1)n+B^2-1}{3}, \quad (16)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (16) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (16) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$3 \cdot (2An+A^2) = 5 \cdot (2(B-1)n+B^2-1), \\ 6An+3A^2 = 10(B-1)n+5(B^2-1). \quad (17)$$

Aby równość (17) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 6A &= 10(B-1) \\ 3A^2 &= 5(B^2-1) \end{cases} \\ \begin{cases} 3A &= 5(B-1) \\ 3A^2 &= 5(B-1)(B+1) \end{cases} \quad (18)$$

Dzieląc drugie równanie układu (18) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A > 0$ i $B > 1$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A = B+1$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$3B+3 = 5B-5,$$

skąd $B = 4$ i $A = 5$. Wstawiając te wartości do równości (16) otrzymujemy

$$N(n) = 2n+5.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $2n+6$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (15) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+6) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} \leq \sum_{k=0}^{2n+5} \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} \leq (2n+6) \cdot \frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+6) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} = \frac{(2n+6) \cdot n}{(n+4)^2} = \frac{2 + \frac{6}{n}}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} \rightarrow 2$$

oraz

$$(2n+6) \cdot \frac{\sqrt{(n+5)^2}}{(n+1)^2} = \frac{(2n+6) \cdot (n+5)}{(n+1)^2} = \frac{\left(2 + \frac{6}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow 2.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 5$, $B = 4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.

124. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 2$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+2 \cdot \frac{2An+A^2}{2}}}{n^2+4n+4+2(B-2)n+B^2-4} = \\ = \frac{\sqrt{n^2+2 \cdot \frac{2An+A^2}{2}}}{(n+2)^2+2(B-2)n+B^2-4},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k}, \quad (19)$$

gdzie

$$N(n) = \frac{2An+A^2}{2} = 2(B-2)n+B^2-4, \quad (20)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (20) muszą być równe i całkowite.

W celu znalezienia takich A i B , aby prawe równanie (20) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n , dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$\begin{aligned} 2An + A^2 &= 2 \cdot (2(B-2)n + B^2 - 4), \\ 2An + A^2 &= 4(B-2)n + 2B^2 - 8. \end{aligned} \quad (21)$$

Aby równość (21) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2A = 4(B-2) \\ A^2 = 2B^2 - 8 \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} A = 2(B-2) \\ A^2 = 2(B-2)(B+2) \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie układu (22) przez pierwsze (w którym zgodnie z założonymi nierównościami $A > 0$ i $B > 2$ obie strony są dodatnie, a więc różne od zera) otrzymujemy $A = B + 2$, co po podstawieniu do równania pierwszego daje

$$B + 2 = 2B - 4,$$

skąd $B = 6$ i $A = 8$. Wstawiając te wartości do równości (20) otrzymujemy

$$N(n) = 8n + 32.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $8n + 33$ składniki.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (19) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(8n + 33) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} \leq \sum_{k=0}^{8n+32} \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} \leq (8n+33) \cdot \frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+2)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(8n + 33) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+6)^2} = \frac{(8n+33) \cdot n}{(n+6)^2} = \frac{8 + \frac{33}{n}}{\left(1 + \frac{6}{n}\right)^2} \rightarrow 8$$

oraz

$$(8n + 33) \cdot \frac{\sqrt{(n+8)^2}}{(n+2)^2} = \frac{(8n+33) \cdot (n+8)}{(n+2)^2} = \frac{\left(8 + \frac{33}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{8}{n}\right)}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} \rightarrow 8.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 8.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A = 8$, $B = 6$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 8.

125. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2} + \frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A < B$, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} = \frac{\sqrt{n^2+14n+49}}{n^2+2Bn+B^2} = \frac{\sqrt{n^2+7 \cdot (2n+7)}}{n^2+2An+A^2+(2(B-A)n+B^2-A^2)},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)} \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k}, \quad (23)$$

gdzie

$$N(n) = 2n+7 = 2(B-A)n+B^2-A^2, \quad (24)$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1=2n+8$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (24) muszą być równe.

Aby prawa równość (24) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n , odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2 = 2 \cdot (B-A) \\ 7 = B^2 - A^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = B-A \\ 7 = (B-A) \cdot (B+A) \end{cases}$$

Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $7 = A+B$, co prowadzi do $A=3$ i $B=4$.

Przystępując do rozwiązania właściwej części zadania szacujemy sumę (23) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(2n+8) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} \leq \sum_{k=0}^{2n+7} \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+3)^2+k} \leq (2n+8) \cdot \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2},$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n \rightarrow +\infty$.

Otrzymujemy

$$(2n+8) \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{(n+4)^2} = \frac{(2n+8) \cdot n}{(n+4)^2} = \frac{2 + \frac{8}{n}}{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^2} \rightarrow 2$$

oraz

$$(2n+8) \cdot \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+3)^2} = \frac{(2n+8) \cdot (n+7)}{(n+3)^2} = \frac{\left(2 + \frac{8}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{7}{n}\right)}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2} \rightarrow 2.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 2.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=3$, $B=4$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 2.