

Kolokwium nr 2: wtorek¹ 16.11.2021, godz. 8:15-9:00, materiał zad. 1–125.

**Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w poniedziałek 8.11.2021 i wtorek 9.11.2021.**

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

94. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^5 + 1} - n^3}{\sqrt[4]{n^6 + n^5 + 1} - n^2}.$$

95. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^{16} + n^3} - n^8)^3}{(\sqrt{n^{16} + n^5} - n^8)^5}.$$

96. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n^{18} + n^7} - n^6)^2}{(\sqrt{n^{18} + n^7} - n^9)^5}.$$

97. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12} + n} - n^6}{(\sqrt{n^4 + n} - n^2)^k}$$

dla tak dobranej wartości parametru k , aby granica ta była dodatnia i skończona.

98. Wskazać liczbę naturalną k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{14} + 9n^9 + 1} - n^7}{n^k}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

99. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt{n^{666} + 1} - n^{333}))$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

100. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot (\sqrt[4]{n^{888} + 1} - n^{222}))$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

101. Wskazać liczbę rzeczywistą k , dla której granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^{666} + n^k} - n^{222})$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Obliczyć wartość granicy przy tak wybranej liczbie k .

¹W przypadku, gdy 16.11.2021 będą zajęcia zdalne, kolokwium odbędzie się zdalnie na wykładzie w środę 17.11.2021 o godz. 8:15.

102. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 6n^3} - n^2 - 3n).$$

103. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n}{3} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{n+4}{n} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n}{4} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2}{5} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{2n+2020}{6} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

104. Wskaż liczbę rzeczywistą k , dla której podana granica istnieje i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Podaj wartość granicy dla tej wartości parametru k . Jeżeli odpowiedź jest liczbą wymierną, podaj ją w postaci ułamka nieskracalnego lub liczby całkowitej.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{2} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{2} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{2}}{3} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{3} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{n}{3}}{2} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{2}}{4} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^k \cdot \binom{\binom{2n}{4}}{3} \right) = \dots$ dla $k = \dots$

Zadania 105–110: Jeśli nie sprawiają Ci trudności, ogranicz się do wyznaczenia liczby składników sumy.

Zadania 111–119: Rozwiąż je starannie.

Zadania 120–125: Jeśli nie sprawiają Ci trudności, ogranicz się do wyznaczenia A i B .

105. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^3} + \frac{n}{n^3+1} + \frac{n}{n^3+2} + \frac{n}{n^3+3} + \frac{n}{n^3+4} + \frac{n}{n^3+5} + \frac{n}{n^3+6} + \dots + \frac{n}{(n+1)^3} \right).$$

106. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^5+1}{\sqrt{18n^{18}+1}} + \frac{5n^5+2}{\sqrt{18n^{18}+2}} + \frac{5n^5+3}{\sqrt{18n^{18}+3}} + \frac{5n^5+4}{\sqrt{18n^{18}+4}} + \dots + \frac{5n^5+4n^4}{\sqrt{18n^{18}+4n^4}} \right).$$

107. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^7+n^4} + \frac{n^4+1}{n^7+n^4+1} + \frac{n^4+2}{n^7+n^4+2} + \frac{n^4+3}{n^7+n^4+3} + \frac{n^4+4}{n^7+n^4+4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^7+(n+1)^4} \right).$$

108. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{49n^7-1}} + \frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{49n^7+1}} + \frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt{49n^7-1}} + \dots + \frac{\sqrt{n^3+k}}{\sqrt{49n^7+(-1)^k}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+1)^3}}{\sqrt{49n^7-1}} \right).$$

109. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + \frac{n^2+1}{\sqrt{(n^2+1)^3+1}} + \frac{n^2+2}{\sqrt{(n^2+2)^3+1}} + \frac{n^2+3}{\sqrt{(n^2+3)^3+1}} + \frac{n^2+4}{\sqrt{(n^2+4)^3+1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+k}{\sqrt{(n^2+k)^3+1}} + \dots + \frac{(n+3)^2}{\sqrt{(n+3)^6+1}} \right).$$

110. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{(n^2+n)^2}} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n^2+n)^2+2n^2}} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{\sqrt{(n^2+n)^2+3n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{\sqrt{(n^2+n)^2+kn^2}} + \dots + \frac{\sqrt{(n+4)^2-4}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-2n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2-2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2-n^2}} + \frac{\sqrt{(n+4)^2}}{\sqrt{(n^2+3n)^2}} \right).$$

111. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 1 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 2 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 3 - n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + k - n^2}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n - 2 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n - 1 - n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^4 + n^3 + n - n^2}} \right).$$

112. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2 + 4} + \sqrt[3]{n^2 + 8} + \sqrt[3]{n^2 + 12} + \sqrt[3]{n^2 + 16} + \sqrt[3]{n^2 + 20} + \dots + \sqrt[3]{(n+2)^2}}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2 + 3} + \sqrt[3]{n^2 + 6} + \sqrt[3]{n^2 + 9} + \sqrt[3]{n^2 + 12} + \sqrt[3]{n^2 + 15} + \dots + \sqrt[3]{(n+3)^2}}.$$

113. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^7 + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^7 + 4} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^7 + 9} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^7 + 16} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 5}}{n^7 + 25} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^3}}{n^7 + n^6} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

114. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^p + 1}{\sqrt{900n^{900} + 1}} + \frac{n^p + 8}{\sqrt{900n^{900} + 32}} + \dots + \frac{n^p + k^3}{\sqrt{900n^{900} + k^5}} + \dots + \frac{n^p + 8n^{18}}{\sqrt{900n^{900} + 32n^{30}}} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru p , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

115. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 4} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 3}}{n^{13} + 9} + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + 4}}{n^{13} + 16} + \dots + \frac{\sqrt[3]{k \cdot n^k + n^4}}{n^{13} + n^8} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

116. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{k \cdot n^k + 1}}{n^{13} + 1} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 2}}{n^{13} + 2} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 3}}{n^{13} + 3} + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + 4}}{n^{13} + 4} + \dots + \frac{\sqrt{k \cdot n^k + n^5}}{n^{13} + n^5} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

117. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^k + n^4} + \frac{n^4 + 1}{n^k + n^4 + 1} + \frac{n^4 + 2}{n^k + n^4 + 2} + \frac{n^4 + 3}{n^k + n^4 + 3} + \frac{n^4 + 4}{n^k + n^4 + 4} + \dots + \frac{(n+1)^4}{n^k + (n+1)^4} \right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej dodatniej parametru k , aby powyższa granica była dodatnia i skończona.

118. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{n^3} \frac{\sqrt{n^p + k}}{n^7 + k^2}$$

dobierając tak wartość parametru p , aby granica ta była dodatnia i skończona.

119. a) Dobrać takie liczby całkowite $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie **b)** miało sens.

b) Obliczyć granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+1)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+1)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+1)^2+6} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+1)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla A i B dobranych w zadaniu **a)**.

120. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+3)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+3)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+3)^2+4} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+3)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+3)^2+8} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+3)^2+2k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-4} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 3$, aby zadanie miało sens.

121. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+B)^2} + \frac{\sqrt{n^2+3}}{(n+B)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+B)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+9}}{(n+B)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+12}}{(n+B)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+3k}}{(n+B)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-9}}{(n+6)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+6)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-3}}{(n+6)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+6)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B < 6$, aby zadanie miało sens.

122. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2}} + \frac{n^2+5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2}} + \frac{n^2+10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+4}} + \frac{n^2+15}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+6}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{n^2+5k}{n^2 \cdot \sqrt{(n+A)^2+2k}} + \dots + \frac{(n+10)^2-10}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-4}} + \frac{(n+10)^2-5}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2-2}} + \frac{(n+10)^2}{n^2 \cdot \sqrt{(n+B)^2}} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich $A < B$, aby zadanie miało sens.

123. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+1)^2} + \frac{\sqrt{n^2+5}}{(n+1)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+10}}{(n+1)^2+6} + \frac{\sqrt{n^2+15}}{(n+1)^2+9} + \frac{\sqrt{n^2+20}}{(n+1)^2+12} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+5k}}{(n+1)^2+3k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-15}}{(n+B)^2-9} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-10}}{(n+B)^2-6} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-5}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 1$, aby zadanie miało sens.

124. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+2)^2} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+2)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+4}}{(n+2)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+6}}{(n+2)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+8}}{(n+2)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+2k}}{(n+2)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A > 0$ i $B > 2$, aby zadanie miało sens.

125. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}}{(n+A)^2} + \frac{\sqrt{n^2+7}}{(n+A)^2+1} + \frac{\sqrt{n^2+14}}{(n+A)^2+2} + \frac{\sqrt{n^2+21}}{(n+A)^2+3} + \frac{\sqrt{n^2+28}}{(n+A)^2+4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\sqrt{n^2+7k}}{(n+A)^2+k} + \dots + \frac{\sqrt{(n+7)^2-21}}{(n+B)^2-3} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-14}}{(n+B)^2-2} + \frac{\sqrt{(n+7)^2-7}}{(n+B)^2-1} + \frac{\sqrt{(n+7)^2}}{(n+B)^2} \right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych $A < B$, aby zadanie miało sens.