

**66.** Która liczba jest większa:  $(7 - \sqrt{17})^{2017}$  czy  $(7 - \sqrt{17})^{2015}$  ?

*Odpowiedź:*  $(7 - \sqrt{17})^{2017} > (7 - \sqrt{17})^{2015}$ .

Powyższa nierówność wynika z nierówności  $x^{2017} > x^{2015}$  dla  $x > 1$  oraz z oszacowania

$$7 - \sqrt{17} > 7 - \sqrt{25} = 7 - 5 = 2 > 1.$$

**67.** Która liczba jest większa:  $(7 - \sqrt{37})^{2017}$  czy  $(7 - \sqrt{37})^{2015}$  ?

*Odpowiedź:*  $(7 - \sqrt{37})^{2017} < (7 - \sqrt{37})^{2015}$ .

Powyższa nierówność wynika z nierówności  $x^{2017} < x^{2015}$  dla  $0 < x < 1$  oraz z oszacowań

$$0 = 7 - 7 = 7 - \sqrt{49} < 7 - \sqrt{37} < 7 - \sqrt{36} = 7 - 6 = 1.$$

**68.** Która liczba jest większa:  $(7 - \sqrt{57})^{2017}$  czy  $(7 - \sqrt{57})^{2015}$  ?

*Odpowiedź:*  $(7 - \sqrt{57})^{2017} > (7 - \sqrt{57})^{2015}$ .

Powyższa nierówność wynika z nierówności  $x^{2017} > x^{2015}$  dla  $-1 < x < 0$  oraz z oszacowań

$$-1 = 7 - 8 = 7 - \sqrt{64} < 7 - \sqrt{57} < 7 - \sqrt{49} = 7 - 7 = 0.$$

**69.** Która liczba jest większa:  $(7 - \sqrt{77})^{2017}$  czy  $(7 - \sqrt{77})^{2015}$  ?

*Odpowiedź:*  $(7 - \sqrt{77})^{2017} < (7 - \sqrt{77})^{2015}$ .

Powyższa nierówność wynika z nierówności  $x^{2017} < x^{2015}$  dla  $x < -1$  oraz z oszacowania

$$7 - \sqrt{77} < 7 - \sqrt{64} = 7 - 8 = -1.$$

**70.** Która liczba jest większa:  $2^{2^{2^{11}}}$  czy  $1000^{2^{2^{10}}}$  ?

*Odpowiedź:*  $2^{2^{2^{11}}} > 1000^{2^{2^{10}}}$ .

Korzystając z własności potęgowania otrzymujemy

$$2^{2^{2^{11}}} = 2^{2^{2^{10}+2^{10}}} = 2^{2^{2^{10}} \cdot 2^{10}} = \left(2^{2^{2^{10}}}\right)^{2^{10}} > 1000^{2^{2^{10}}}.$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności

$$2^{2^{2^{10}}} = 2^{2^{1024}} > 2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{10} = 1024 > 1000.$$



74. Dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej  $n$  udowodnić nierówności

$$n^{2^{120}} < 2^n < n^{2^{122}}.$$

*Rozwiązanie:*

Przyjęcie  $n = 2^m$  pozwala na przepisanie podanej nierówności w postaci równoważnej:

$$2^{m \cdot 2^{120}} < 2^{2^m} < 2^{m \cdot 2^{122}},$$

czyli

$$m \cdot 2^{120} < 2^m < m \cdot 2^{122}.$$

Z kolei podstawienie  $m = 2^k$  prowadzi do

$$2^{k+120} < 2^{2^k} < 2^{k+122},$$

czyli

$$k + 120 < 2^k < k + 122.$$

Zauważając, że powyższe nierówności są prawdziwe dla  $k = 7$ , otrzymujemy  $m = 2^7 = 128$  i w konsekwencji  $n = 2^{128}$ .

75. Wskazać odpowiednią liczbę naturalną  $n$  i udowodnić dla niej nierówności

$$n^{2^{2017}} < 2^n < n^{2^{2018}}.$$

*Rozwiązanie:*

*Sposób I*

Przyjmijmy  $n = 2^k$ . Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$2^{k \cdot 2^{2017}} < 2^{2^k} < 2^{k \cdot 2^{2018}},$$

czyli

$$k \cdot 2^{2017} < 2^k < k \cdot 2^{2018}.$$

Zauważmy, że powyższe nierówności są prawdziwe dla  $k = 2028$ , gdyż wtedy

$$k \cdot 2^{2017} = 2028 \cdot 2^{2017} < 2048 \cdot 2^{2017} = 2^{11} \cdot 2^{2017} = 2^{2028} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{2028} = 2^{10} \cdot 2^{2018} = 1024 \cdot 2^{2018} < 2028 \cdot 2^{2018} = k \cdot 2^{2018}.$$

*Odpowiedź*

Liczbą spełniającą podane nierówności jest  $n = 2^{2028}$ .

*Sposób II*

Przyjmijmy  $n = k \cdot 2^{2017}$ . Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$(k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < 2^{k \cdot 2^{2017}} < (k \cdot 2^{2017})^{2^{2018}},$$

czyli

$$(k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < (2^k)^{2^{2017}} < (k^2 \cdot 2^{4034})^{2^{2017}},$$

co jest równoważne nierównościom

$$k \cdot 2^{2017} < 2^k < k^2 \cdot 2^{4034} \quad (\heartsuit).$$

Zauważmy, że nierówności  $(\heartsuit)$  są prawdziwe dla  $k = 2028$ , gdyż wówczas

$$k \cdot 2^{2017} = 2028 \cdot 2^{2017} < 2048 \cdot 2^{2017} = 2^{11} \cdot 2^{2017} = 2^{2028} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{2028} = 2^{20} \cdot 2^{2008} = 1024^2 \cdot 2^{2008} < 2028^2 \cdot 2^{2008} = k^2 \cdot 2^{2008} < k^2 \cdot 2^{4034}.$$

Ale nierówności  $(\heartsuit)$  są też prawdziwe dla  $k = 4056$ , gdyż wówczas

$$k \cdot 2^{2017} = 4056 \cdot 2^{2017} < 4096 \cdot 2^{2017} = 2^{12} \cdot 2^{2017} = 2^{2029} < 2^{4056} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{4056} = 2^{22} \cdot 2^{4034} = 2048^2 \cdot 2^{4034} < 4056^2 \cdot 2^{4034} = k^2 \cdot 2^{4034}.$$

*Odpowiedź*

Liczbą spełniającą podane nierówności jest  $n = 2028 \cdot 2^{2017}$ . A innym przykładem jest  $n = 4056 \cdot 2^{2017}$ .

**76.** Wskazać odpowiednią liczbę naturalną  $n$  i udowodnić dla niej nierówności

$$4^n < n^{2^{2017}} < 8^n.$$

*Rozwiązanie:*

*Ślepa uliczka*

Przyjmijmy  $n = 2^k$ . Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$4^{2^k} < 2^{k \cdot 2^{2017}} < 8^{2^k},$$

czyli kolejno

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^k &< k \cdot 2^{2017} < 3 \cdot 2^k, \\ 2 \cdot 2^{k-2017} &< k < 3 \cdot 2^{k-2017}. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

Jednak nie udaje się dobrać liczby naturalnej  $k$ , która spełniałaby nierówności  $(\heartsuit)$ .

*Rozwiązanie poprawne*

Przyjmijmy  $n = k \cdot 2^{2017}$ . Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$4^{k \cdot 2^{2017}} < (k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < 8^{k \cdot 2^{2017}},$$

czyli

$$(4^k)^{2^{2017}} < (k \cdot 2^{2017})^{2^{2017}} < (8^k)^{2^{2017}},$$

co jest równoważne kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 4^k &< k \cdot 2^{2017} < 8^k, \\ 2^{2k} &< k \cdot 2^{2017} < 2^{3k}. \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

Zauważmy, że nierówności  $(\clubsuit)$  są prawdziwe dla  $k = 1000$ , gdyż wówczas

$$2^{2k} = 2^{2000} < 1000 \cdot 2^{2017} < 2^{10} \cdot 2^{2017} = 2^{2027} < 2^{3000} = 2^{3k}.$$





Na mocy zasady indukcji dowiedziona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej  $n$ .

**80.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt{9n^2 + 40n} - \sqrt{9n^2 + 16n} \leq 2C.$$

*Rozwiązanie:*

Stosując wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

prawdziwy w przypadku  $a + b \neq 0$ , otrzymujemy

$$\sqrt{9n^2 + 40n} - \sqrt{9n^2 + 16n} = \frac{24n}{\sqrt{9n^2 + 40n} + \sqrt{9n^2 + 16n}} = \frac{24}{\sqrt{9 + \frac{40}{n}} + \sqrt{9 + \frac{16}{n}}}.$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry, czyli  $n$  od dołu przez 1) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9 + \frac{40}{n}} + \sqrt{9 + \frac{16}{n}}} \geq \frac{24}{\sqrt{9 + 40} + \sqrt{9 + 16}} = \frac{24}{7 + 5} = 2 = C.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu, czyli  $1/n$  przez 0) prowadzi do:

$$\frac{24}{\sqrt{9 + \frac{40}{n}} + \sqrt{9 + \frac{16}{n}}} \leq \frac{24}{\sqrt{9 + 0} + \sqrt{9 + 0}} = \frac{24}{3 + 3} = 4 = 2C.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą  $C = 2$ .

**Uwaga:**

Nietrudno zauważyć, że ciąg  $\left( \frac{24}{\sqrt{9 + \frac{40}{n}} + \sqrt{9 + \frac{16}{n}}} \right)_{n=1}^{\infty}$  jest rosnący, jego pierwszy wyraz jest równy 2, a granica<sup>1</sup> 4. Wynika stąd, że uzyskane przez nas oszacowania są optymalne, w związku z czym w każdym poprawnym rozwiązaniu musi być  $C = 2$ .

**81.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leq 7C.$$

*Rozwiązanie:*

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}.$$

<sup>1</sup>Tu i wszędzie dalej, gdzie pojawia się granica ciągu: Jeśli nie wiesz, co to jest, odłóż czytanie tych fragmentów na później.

Otrzymujemy

$$\sqrt[3]{n^3+63n^2}-n = \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2}.$$

Dalszą część rozwiązania można przeprowadzić dwoma sposobami.

*Sposób I*

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2} &\geq \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^3}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^3}+n^2} = \\ &= \frac{63n^2}{16n^2+4n^2+n^2} = \frac{63n^2}{21n^2} = 3 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2} \leq \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+0}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+0}+n^2} = \frac{63n^2}{3n^2} = 21 = 7 \cdot 3.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą  $C = 3$ .

*Sposób II*

Oznaczamy uzyskane wyrażenie przez  $a_n$  i przepisujemy je w postaci

$$a_n = \frac{63n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+63n^2}\right)^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+63n^2}+n^2} = \frac{63}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{63}{n}}+1}.$$

Ponieważ licznik ostatniego wyrażenia jest stały, a mianownik maleje wraz ze wzrostem  $n$ , ciąg  $(a_n)$  jest rosnący. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$a_1 \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ponieważ  $a_1 = 3$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 21$ , otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą  $C = 3$ .

**82.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[8]{n^8+255n^7}-n \leq 32C.$$

*Rozwiązanie:*

*Sposób I:*

Ponieważ wyrażenie dane w treści zadania jest różnicą wyrażeń zbliżonej wielkości, powinniśmy przez wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia doprowadzić je do postaci, w której można będzie wykonać odejmowanie.

W tym celu trzykrotnie zastosujemy wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b},$$

gdzie przy dodatnich  $a, b$  mianownik jest zawsze różny od zera.



Możemy też od razu zastosować wzór na różnicę ósmych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^8 - b^8}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4)},$$

który powstaje właśnie przez trzykrotne skorzystanie ze wzoru na różnicę kwadratów.

Otrzymujemy

$$\sqrt[8]{n^8 + 255n^7} - n = \frac{255n^7}{(\sqrt[8]{n^8 + 255n^7} + n) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 255n^7} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 255n^7} + n^4)}. \quad (\diamond)$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując mianownik od góry:

$$\begin{aligned} & \frac{255n^7}{(\sqrt[8]{n^8 + 255n^7} + n) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 255n^7} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 255n^7} + n^4)} \geq \\ & \geq \frac{255n^7}{(\sqrt[8]{n^8 + 255n^8} + n) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 255n^8} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 255n^8} + n^4)} = \\ & = \frac{255n^7}{17n \cdot 5n^2 \cdot 3n^4} = \frac{255n^7}{255n^7} = 1 \end{aligned}$$

i od góry (szacując mianownik od dołu):

$$\begin{aligned} & \frac{255n^7}{(\sqrt[8]{n^8 + 255n^7} + n) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 255n^7} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 255n^7} + n^4)} \leq \\ & \leq \frac{255n^7}{(\sqrt[8]{n^8 + 0} + n) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 0} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 0} + n^4)} = \\ & = \frac{255n^7}{2n \cdot 2n^2 \cdot 2n^4} = \frac{255n^7}{8n^7} = \frac{255}{8} < \frac{256}{8} = 32. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą  $C = 1$ .

*Sposób II:*

Zaczynamy jak w sposobie I. Otrzymawszy wyrażenie  $(\diamond)$  przekształcamy je dalej i oznaczamy przez  $a_n$ :

$$\begin{aligned} & \frac{255n^7}{(\sqrt[8]{n^8 + 255n^7} + n) \cdot (\sqrt[4]{n^8 + 255n^7} + n^2) \cdot (\sqrt{n^8 + 255n^7} + n^4)} = \\ & = \frac{255}{(\sqrt[8]{1 + 255n^{-1}} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + 255n^{-1}} + 1) \cdot (\sqrt{1 + 255n^{-1}} + 1)} = a_n. \end{aligned}$$

Ponieważ w powyższym wyrażeniu wraz ze wzrostem  $n$  maleje mianownik, a przy tym wszystkie składowe tego wyrażenia są dodatnie, ciąg  $(a_n)$  jest rosnący. Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą więc nierówności

$$a_1 \leq a_n < \lim_{k \rightarrow \infty} a_k. \quad (\clubsuit)$$

Ponieważ

$$a_1 = \sqrt[8]{1 + 255} - 1 = 2 - 1 = 1$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{255}{(\sqrt[8]{1+255k^{-1}}+1) \cdot (\sqrt[4]{1+255k^{-1}}+1) \cdot (\sqrt{1+255k^{-1}}+1)} = \\ &= \frac{255}{(\sqrt[8]{1+0}+1) \cdot (\sqrt[4]{1+0}+1) \cdot (\sqrt{1+0}+1)} = \frac{255}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{255}{8} < \frac{256}{8} = 32, \end{aligned}$$

otrzymujemy wymagane oszacowania ze stałą  $C = 1$ .

*Uwaga:*

Formalnie poprawna, ale dydaktycznie bardzo niezręczna wersja nierówności ( $\clubsuit$ ), to

$$a_1 \leq a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

W powyższym wzorze zmienna  $n$  występuje w dwóch zupełnie różnych rolach. Przemianowanie jednego z jej bytów na  $k$  pozwala uniknąć nieporozumień.

**83.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leq \sqrt[4]{n^4 + 15n^2} - n \leq \frac{4C}{n}.$$

*Rozwiązanie:*

Stosując wzór na różnicę czwartych potęg w postaci

$$a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a^2 + b^2) \cdot (a + b)}$$

otrzymujemy

$$\sqrt[4]{n^4 + 15n^2} - n = \frac{15n^2}{(\sqrt{n^4 + 15n^2 + n^2}) \cdot (\sqrt[4]{n^4 + 15n^2} + n)} = \frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + \frac{15}{n^2}} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{15}{n^2}} + 1)}$$

Szacowanie od dołu (mianownika od góry) prowadzi do:

$$\frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + \frac{15}{n^2}} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{15}{n^2}} + 1)} \geq \frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + 15} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + 15} + 1)} = \frac{1}{n}.$$

Szacowanie od góry (mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + \frac{15}{n^2}} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + \frac{15}{n^2}} + 1)} \leq \frac{15}{n \cdot (\sqrt{1 + 0} + 1) \cdot (\sqrt[4]{1 + 0} + 1)} = \frac{15}{4n} < \frac{16}{4n} = \frac{4}{n}.$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą  $C = 1$ .

**84.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{25n^2 + 11} - 5n}{\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} - n} \leq 11C.$$

*Rozwiązanie:*

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania

występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy w liczniku wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

a w mianowniku następujący wzór na różnicę czwartych potęg:

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{a^4 - b^4}{(a + b) \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2 + 11} - 5n}{\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} - n} = \frac{11 \cdot (\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} + n) \cdot (\sqrt{n^4 + 80n^2} + n^2)}{(\sqrt{25n^2 + 11} + 5n) \cdot 80n^2}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\begin{aligned} \frac{11 \cdot (\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} + n) \cdot (\sqrt{n^4 + 80n^2} + n^2)}{(\sqrt{25n^2 + 11} + 5n) \cdot 80n^2} &\leq \frac{11 \cdot (\sqrt[4]{n^4 + 80n^4} + n) \cdot (\sqrt{n^4 + 80n^4} + n^2)}{(\sqrt{25n^2 + 0} + 5n) \cdot 80n^2} = \\ &= \frac{11 \cdot 4n \cdot 10n^2}{10n \cdot 80n^2} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

i od dołu

$$\begin{aligned} \frac{11 \cdot (\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} + n) \cdot (\sqrt{n^4 + 80n^2} + n^2)}{(\sqrt{25n^2 + 11} + 5n) \cdot 80n^2} &\geq \frac{11 \cdot (\sqrt[4]{n^4 + 0} + n) \cdot (\sqrt{n^4 + 0} + n^2)}{(\sqrt{25n^2 + 11n^2} + 5n) \cdot 80n^2} = \\ &= \frac{11 \cdot 2n \cdot 2n^2}{11n \cdot 80n^2} = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą  $C = 1/20$ .

**85.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{25n^2 + 24} - 5n}{\sqrt{9n^2 + 40} - 3n} \leq 2C.$$

*Rozwiązanie:*

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{25n^2 + 24} - 5n}{\sqrt{9n^2 + 40} - 3n} = \frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 40} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 24} + 5n)}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 40} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 24} + 5n)} \leq \frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 40n^2} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 0} + 5n)} = \frac{24 \cdot (7n + 3n)}{40 \cdot (5n + 5n)} = \frac{24 \cdot 10n}{40 \cdot 10n} = \frac{3}{5}$$

i od dołu

$$\frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 40} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 24} + 5n)} \geq \frac{24 \cdot (\sqrt{9n^2 + 0} + 3n)}{40 \cdot (\sqrt{25n^2 + 24n^2} + 5n)} = \frac{24 \cdot (3n + 3n)}{40 \cdot (7n + 5n)} = \frac{24 \cdot 6n}{40 \cdot 12n} = \frac{3}{10}.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałą  $C = 3/10$ .

**86.** Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.

Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich  $C$  i  $D$  spełniających nierówność  $D < 3C$  udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt[3]{n^3 + 7} - n}{\sqrt{4n^4 + 5} - 2n^2} \leq D.$$

*Rozwiązanie:*

Stosując do licznika wzór na różnicę sześcianów w postaci

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2},$$

a do mianownika wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

otrzymujemy

$$\frac{\sqrt[3]{n^3 + 7} - n}{\sqrt{4n^4 + 5} - 2n^2} = \frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4 + 5} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3 + 7)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 7} + n^2\right) \cdot 5}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od dołu, szacując licznik od dołu i mianownik od góry:

$$\frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4 + 5} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3 + 7)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 7} + n^2\right) \cdot 5} \geq \frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4 + 0} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3 + 7n^3)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 7n^3} + n^2\right) \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Następnie szacujemy od góry, szacując licznik od góry i mianownik od dołu:

$$\frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4 + 5} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3 + 7)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 7} + n^2\right) \cdot 5} \leq \frac{7 \cdot (\sqrt{4n^4 + 5n^4} + 2n^2)}{\left(\sqrt[3]{(n^3 + 0)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 0} + n^2\right) \cdot 5} = \frac{7}{3}.$$

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi

$$C = \frac{4}{5} \quad \text{i} \quad D = \frac{7}{3} = \frac{35}{15} < \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = 3C.$$

**87.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n + 28} - \sqrt{36n + 13}}{\sqrt{25n + 75} - \sqrt{25n + 11}} \leq 2C.$$

*Rozwiązanie:*

Stosując dwukrotnie (raz na poziomie licznika i raz na poziomie mianownika) wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b},$$

prawdziwy w przypadku  $a + b \neq 0$ , otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{36n+28} - \sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75} - \sqrt{25n+11}} = \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})}. \quad (3)$$

Szacowanie od dołu (licznika od dołu i mianownika od góry) prowadzi do:

$$\begin{aligned} \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})} &\geq \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+0} + \sqrt{25n+0})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28n} + \sqrt{36n+13n})} = \\ &= \frac{15 \cdot 10 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot (\sqrt{64n} + \sqrt{49n})} = \frac{150 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot 15 \cdot \sqrt{n}} = \frac{5}{32} = C. \end{aligned} \quad (4)$$

Szacowanie od góry (licznika od góry i mianownika od dołu) prowadzi do:

$$\begin{aligned} \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75} + \sqrt{25n+11})}{64 \cdot (\sqrt{36n+28} + \sqrt{36n+13})} &\leq \frac{15 \cdot (\sqrt{25n+75n} + \sqrt{25n+11n})}{64 \cdot (\sqrt{36n+0} + \sqrt{36n+0})} = \\ &= \frac{15 \cdot (\sqrt{100n} + \sqrt{36n})}{64 \cdot 12 \cdot \sqrt{n}} = \frac{15 \cdot 16 \cdot \sqrt{n}}{64 \cdot 12 \cdot \sqrt{n}} = \frac{5}{16} = 2C. \end{aligned} \quad (5)$$

Zatem udowodniliśmy podane w treści zadania oszacowania ze stałą  $C = 5/32$ .

**88.** Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  oraz liczbę rzeczywistą  $k$  udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k \leq \frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} \leq 4C \cdot n^k.$$

*Rozwiązanie:*

Szacujemy dane w treści zadania wyrażenie od góry (szacujemy licznik od góry, a mianownik od dołu, upodabniając wszystkie składniki do składnika dominującego; następnie szacujemy współczynniki pod pierwiastkami tak, aby przy pierwiastkowaniu uzyskać liczby całkowite):

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} < \frac{\sqrt{40n-0}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{40n+0}-n^{1/3}} < \frac{\sqrt{49n}+3n^{1/2}}{\sqrt[3]{27n}-n^{1/3}} = \frac{10n^{1/2}}{2n^{1/3}} = 5n^{1/6}.$$

Analogiczne szacowanie od dołu (licznik od dołu, mianownik od góry) prowadzi do:

$$\frac{\sqrt{40n-11}+3}{\sqrt[3]{40n+11}-1} > \frac{\sqrt{40n-11n}+0}{\sqrt[3]{40n+11n}-0} = \frac{\sqrt{29n}}{\sqrt[3]{51n}} > \frac{\sqrt{25n}}{\sqrt[3]{64n}} = \frac{5n^{1/2}}{4n^{1/3}} = \frac{5n^{1/6}}{4}.$$

Udowodniliśmy więc żądane nierówności ze stałymi  $C = 5/4$  i  $k = 1/6$ .

*Uwagi:*

Liczba  $k = 1/6$  jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie, w którym występuje inna wartość  $k$ , jest błędne.

Stała  $C$  wynika po części z natury szacowanego wyrażenia, a po części z przyjętej przez nas metody szacowania. Przy innej strategii szacowania można sobie wyobrazić poprawne rozwiązanie z inną stałą  $C$ .

W powyższym rozwiązaniu występują ostre nierówności, podczas gdy w treści zadania nierówności są słabe. To dlatego, że celem zadania jest uzyskanie zasadniczego oszacowania, a nie śledzenie, które nierówności są słabe, a które ostre – stąd słabe nierówności w tezie zadania, pomimo że łatwo można uzyskać ostre. Przy tak sformułowanej treści zadania, w przedstawionym wyżej rozwiązaniu można więc zamienić nierówności ostre na słabe (wszystkie lub niektóre z nich).

**89.** Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie  $C$  oraz  $D$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{n^2+1} - n - \frac{C}{n} \right| < \frac{D}{n^3}.$$

*Rozwiązanie:*

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy lewą stronę nierówności w postaci niezawierającej różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\left| \sqrt{n^2+1} - n - \frac{C}{n} \right| = \left| \sqrt{n^2+1} - \left( n + \frac{C}{n} \right) \right| = \left| \frac{n^2+1 - \left( n + \frac{C}{n} \right)^2}{\sqrt{n^2+1} + \left( n + \frac{C}{n} \right)} \right| = \left| \frac{1 - 2C - \frac{C^2}{n^2}}{\sqrt{n^2+1} + \left( n + \frac{C}{n} \right)} \right|.$$

W liczniku ostatniego wyrażenia dominującymi składnikami są 1 oraz  $2C$ . Aby wyrażenie to miało możliwie mały rząd wielkości, dobieramy  $C$  tak, aby te dwa składniki się uprościły, czyli  $C = 1/2$ . Przy tej wartości  $C$  wykonujemy szacowanie od góry:

$$\frac{\frac{1}{4n^2}}{\sqrt{n^2+1} + \left( n + \frac{1}{2n} \right)} = \frac{1}{4n^2 \left( \sqrt{n^2+1} + n + \frac{1}{2n} \right)} < \frac{1}{4n^2 \left( \sqrt{n^2+0} + n + 0 \right)} = \frac{1}{n^3},$$

co kończy rozwiązanie zadania z  $D = 1/8$ .

*Uwagi:*

Stała  $C$  jest wyznaczona jednoznacznie. Każde rozwiązanie z  $C \neq 1/2$  jest błędne.

Stała  $D = 1/8$  jest najmniejsza możliwa. Każde rozwiązanie z  $D < 1/8$  jest błędne.

**90.** Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie  $C$  oraz  $D$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{n^8 + 3n^6} - n^4}{7n^2 - 4n + 5} \leq D.$$

Liczby  $C$  i  $D$  muszą spełniać nierówność  $D \leq 6C$  (wersja łatwiejsza).

Liczby  $C$  i  $D$  muszą spełniać nierówność  $D \leq 4C$  (wersja trudniejsza).

*Rozwiązanie:*

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów przepisujemy dane w zadaniu wyrażenie w postaci niezawierającej w liczniku różnicy wyrażeń zbliżonej wielkości:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} &= \frac{\sqrt{n^8+3n^6}-n^4}{7n^2-4n+5} \cdot \frac{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4}{\sqrt{n^8+3n^6}+n^4} = \frac{n^8+3n^6-n^8}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} = \\ &= \frac{3n^6}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} \end{aligned}$$

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} \leq \frac{3n^6}{(7n^2-4n^2+0) \cdot (\sqrt{n^8+0}+n^4)} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} = D.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{3n^6}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} \geq \frac{3n^6}{(7n^2-0+5n^2) \cdot (\sqrt{n^8+3n^8}+n^4)} = \frac{3}{12 \cdot 3} = \frac{1}{12} = C,$$

co daje zależność  $D = 6C$  wystarczającą do rozwiązania w wersji łatwiejszej.

Subtelniejsze szacowanie od dołu wykorzystuje nierówność  $4(n-1) \geq 0$  zamiast  $4n \geq 0$  i wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \frac{3n^6}{(7n^2-4n+5) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} &= \frac{3n^6}{(7n^2-4(n-1)+1) \cdot (\sqrt{n^8+3n^6}+n^4)} \geq \\ &\geq \frac{3n^6}{(7n^2-0+n^2) \cdot (\sqrt{n^8+3n^8}+n^4)} = \frac{3}{8 \cdot 3} = \frac{1}{8} = C, \end{aligned}$$

co daje zależność  $D = 4C$  wystarczającą do rozwiązania w wersji trudniejszej.

**91.** Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie  $C$  oraz  $D$  i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leq D.$$

Liczby  $C$  i  $D$  muszą spełniać nierówność  $D \leq 8C$  (wersja najłatwiejsza).

Liczby  $C$  i  $D$  muszą spełniać nierówność  $D \leq 4C$  (wersja średnio trudna).

Liczby  $C$  i  $D$  muszą spełniać nierówność  $D \leq 2C$  (wersja najtrudniejsza).

*Rozwiązanie:*

Przeprowadzamy szacowanie od góry:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \leq \frac{6n^{11}-0+2n^{11}}{6n^{11}-3n^{11}+0} = \frac{8n^{11}}{3n^{11}} = \frac{8}{3} = D.$$

Przeprowadzamy szacowanie od dołu:

$$\frac{6n^{11}-3n^6+2}{6n^{11}-3n^5+3} \geq \frac{6n^{11}-3n^{11}+0}{6n^{11}-0+3n^{11}} = \frac{3n^{11}}{9n^{11}} = \frac{1}{3} = C,$$

co daje zależność  $D = 8C$  wystarczającą do rozwiązania wersji najłatwiejszej.

Subtelniejsze szacowania wykorzystują nierówności  $-3n^6 + 2 \leq -3 + 2 = -1 < 0$  oraz  $-3n^5 + 3 \leq -3 + 3 = 0$  zamiast odpowiednio  $-3n^6 \leq 0$  oraz  $-3n^5 \leq 0$  i wyglądają następująco:

$$\frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} = \frac{6n^{11} + (-3n^6 + 2)}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq \frac{6n^{11} - 0}{6n^{11} - 3n^{11} + 0} = \frac{6n^{11}}{3n^{11}} = 2 = D,$$

$$\frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} = \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} + (-3n^5 + 3)} \geq \frac{6n^{11} - 3n^{11} + 0}{6n^{11} - 0} = \frac{3n^{11}}{6n^{11}} = \frac{1}{2} = C.$$

To daje zależność  $D = 4C$  wystarczającą do rozwiązania wersji średniej.

Można też zauważyć, że

$$6n^{11} - 3n^6 + 2 \leq 6n^{11} - 3n^5 + 2 < 6n^{11} - 3n^5 + 3,$$

skąd

$$\frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} < 1 = D.$$

Zatem rozwiązanie wersji średniej można uzyskać także przy użyciu szacowań z  $C = 1/3$  oraz  $D = 1$ .

Przedstawione wyżej szacowania z  $C = 1/2$  oraz  $D = 1$  składają się na rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

**92.** Dobrać odpowiednią liczbę wymierną  $k$  oraz liczby wymierne dodatnie  $C$  oraz  $D$ , a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności

$$Cn^k \leq \sqrt{4n^2 + 1} + \sqrt{4n^2 + 2} + \sqrt{4n^2 + 3} + \sqrt{4n^2 + 4} + \dots + \sqrt{16n^2 - 1} + \sqrt{16n^2} \leq Dn^k.$$

Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu  $D/C$ :

- Przy  $D/C \geq 2$  zadanie jest najłatwiejsze.
- Przy  $D/C < 3/2$  zadanie jest najtrudniejsze.

*Rozwiązanie:*

Dana w zadaniu suma ma  $12n^2$  składników. Możemy zatem wykonać szacowania

$$24n^3 = 12n^2 \cdot \sqrt{4n^2} \leq \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leq 12n^2 \cdot \sqrt{16n^2} = 48n^3,$$

co kończy rozwiązanie w wersji najłatwiejszej.

Uzyskaliśmy tu liczby  $k = 3$ ,  $C = 24$ ,  $D = 48$  i iloraz  $D/C = 2$ .

Bardziej subtelne szacowanie wymaga rozbicia wyjściowej sumy na dwie sumy

$$\sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} = \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2} \sqrt{i} + \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i},$$

a następnie wykonania szacowania dla każdej z sum z osobna.



Otrzymujemy

$$10n^3 = 5n^2 \cdot \sqrt{4n^2} \leq \sum_{i=4n^2+1}^{9n^2} \sqrt{i} \leq 5n^2 \cdot \sqrt{9n^2} = 15n^3$$

oraz

$$21n^3 = 7n^2 \cdot \sqrt{9n^2} \leq \sum_{i=9n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leq 7n^2 \cdot \sqrt{16n^2} = 28n^3,$$

skąd po dodaniu

$$31n^3 \leq \sum_{i=4n^2+1}^{16n^2} \sqrt{i} \leq 43n^3.$$

To kończy rozwiązanie wersji najtrudniejszej.

Uzyskane liczby to  $k = 3$ ,  $C = 31$ ,  $D = 43$ , a zatem  $D/C = 43/31 < 45/30 = 3/2$ .

**93.** Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie  $s$  i  $t$  oraz odpowiednią liczbę wymierną dodatnią  $C$  i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{(\sqrt{n^{10} + 8n^7} - n^5)^s}{(\sqrt{n^8 + 3n^7} - n^4)^t} \leq 18C.$$

*Rozwiązanie:*

Ponieważ zarówno w liczniku, jak i w mianowniku wyrażenia danego w treści zadania występują różnice wyrażeń zbliżonej wielkości, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów w postaci

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Otrzymujemy

$$\frac{(\sqrt{n^{10} + 8n^7} - n^5)^s}{(\sqrt{n^8 + 3n^7} - n^4)^t} = \frac{(\sqrt{n^8 + 3n^7} + n^4)^t \cdot (8n^7)^s}{(\sqrt{n^{10} + 8n^7} + n^5)^s \cdot (3n^7)^t} = \frac{(\sqrt{n^8 + 3n^7} + n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10} + 8n^7} + n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}}.$$

Szacujemy ostatnie wyrażenie od góry

$$\frac{(\sqrt{n^8 + 3n^7} + n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10} + 8n^7} + n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} \leq \frac{(\sqrt{n^8 + 3n^8} + n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10} + 0} + n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = \frac{(3n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(2n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = 2^{2s} \cdot n^{2s-3t}$$

i od dołu

$$\frac{(\sqrt{n^8 + 3n^7} + n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10} + 8n^7} + n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} \geq \frac{(\sqrt{n^8 + 0} + n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(\sqrt{n^{10} + 8n^{10}} + n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = \frac{(2n^4)^t \cdot 2^{3s} \cdot n^{7s}}{(4n^5)^s \cdot 3^t \cdot n^{7t}} = \frac{2^{s+t} \cdot n^{2s-3t}}{3^t}.$$

Ponieważ oszacowania mają być niezależne od  $n$ , musi być  $2s - 3t = 0$ , wobec czego przyjmujemy  $s = 3$  i  $t = 2$ . Wówczas dolne oszacowanie przybiera wartość  $C = 32/9$ , a górne  $64 = 18C$ .

Otrzymaliśmy więc wymagane oszacowania ze stałymi  $s = 3$ ,  $t = 2$  oraz  $C = 32/9$ .