

78. Niech $A_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 2$.

79. Niech $A_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}}}}}}$, gdzie $\sqrt{2}$ występuje n razy, a potęgowanie jak zwykle wykonujemy od góry. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A_n < 3$.

80. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt{9n^2 + 40n} - \sqrt{9n^2 + 16n} \leq 2C.$$

81. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n \leq 7C.$$

82. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \sqrt[8]{n^8 + 255n^7} - n \leq 32C.$$

83. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{C}{n} \leq \sqrt[4]{n^4 + 15n^2} - n \leq \frac{4C}{n}.$$

84. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{25n^2 + 11} - 5n}{\sqrt[4]{n^4 + 80n^2} - n} \leq 11C.$$

85. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{25n^2 + 24} - 5n}{\sqrt{9n^2 + 40} - 3n} \leq 2C.$$

86. Na potrzeby tego zadania liczbę nazwiemy ładną, jeśli ma jednocyfrowy licznik i jednocyfrowy mianownik.

Dla odpowiednio dobranych **ładnych** liczb wymiernych dodatnich C i D spełniających nierówność $D < 3C$ udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt[3]{n^3 + 7} - n}{\sqrt{4n^4 + 5} - 2n^2} \leq D.$$

87. Dobrać odpowiednią liczbę wymiarną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{36n+28} - \sqrt{36n+13}}{\sqrt{25n+75} - \sqrt{25n+11}} \leq 2C.$$

88. Wskazując odpowiednią liczbę wymiarną dodatnią C oraz liczbę rzeczywistą k udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \cdot n^k \leq \frac{\sqrt{40n-11} + 3}{\sqrt[3]{40n+11} - 1} \leq 4C \cdot n^k.$$

89. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\left| \sqrt{n^2+1} - n - \frac{C}{n} \right| < \frac{D}{n^3}.$$

90. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{\sqrt{n^8+3n^6-n^4}}{7n^2-4n+5} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 6C$ (wersja łatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 4C$ (wersja trudniejsza).

91. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz D i udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{6n^{11} - 3n^6 + 2}{6n^{11} - 3n^5 + 3} \leq D.$$

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 8C$ (wersja najłatwiejsza).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 4C$ (wersja średnio trudna).

Liczby C i D muszą spełniać nierówność $D \leq 2C$ (wersja najtrudniejsza).

92. Dobrać odpowiednią liczbę wymiarną k oraz liczby wymierne dodatnie C oraz D , a następnie udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$Cn^k \leq \sqrt{4n^2+1} + \sqrt{4n^2+2} + \sqrt{4n^2+3} + \sqrt{4n^2+4} + \dots + \sqrt{16n^2-1} + \sqrt{16n^2} \leq Dn^k.$$

Trudność zadania zależy od uzyskanego przez Ciebie ilorazu D/C :

- Przy $D/C \geq 2$ zadanie jest najłatwiejsze.
- Przy $D/C < 3/2$ zadanie jest najtrudniejsze.

93. Dobrać odpowiednie liczby całkowite dodatnie s i t oraz odpowiednią liczbę wymiarną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą nierówności

$$C \leq \frac{(\sqrt{n^{10}+8n^7-n^5})^s}{(\sqrt{n^8+3n^7-n^4})^t} \leq 18C.$$