54. Dowieść, że liczba $\log_{60}150$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{60}150$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{60}150=\frac{m}{n}\,,$$
$$60^{m/n}=150\,,$$
$$60^m=150^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Sposób I

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 3^m\cdot 5^m=2^n\cdot 3^n\cdot 5^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= &n\\ m&=&n\\ m&=&2n\end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n=2m>m=n\,,$$

czyli $n>n$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Sposób II

Ostatnią niezerową cyfrą liczby 60^m jest 6, a ostatnią niezerową cyfrą liczby 150^n jest 5, zatem liczby te nie mogą być równe.

W obu sposobach doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{60}150$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{60}150$ jest niewymierna.

55. Dowieść, że liczba $\log_{45}75$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{45}75$ jest wymierna i niech

m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{45}75 = \frac{m}{n}\,,$$

$$45^{m/n} = 75\,,$$

$$45^m = 75^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2m}\cdot 5^m = 3^n \cdot 5^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m &= & n \\ m &= & 2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$n = 2m > m = 2n > n\,,$$

czyli $n > n$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{45}75$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{45}75$ jest niewymierna.

56. Dowieść, że liczba $\log_{2700}9000$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{2700}9000$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{2700}9000 = \frac{m}{n}\,,$$

$$2700^{m/n} = 9000\,,$$

$$2700^m = 9000^n\,. \tag{1}$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{2m}\cdot 3^{3m}\cdot 5^{2m} = 2^{3n}\cdot 3^{2n}\cdot 5^{3n}\,. \tag{2}$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2m & = & 3n \\ 3m & = & 2n \\ 2m & = & 3n \end{array}\right. \tag{3}$$

Jednak układ równań (3) nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$2m = 3n > 2n = 3m > 2m\,,$$

czyli $2m > 2m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m = n = 0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy więc do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{2700}9000$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{2700}9000$ jest niewymierna.

57. Niech

$$a = 2^{32}\cdot 3^{11}\cdot 6^{10} \qquad \text{oraz} \qquad b = 2^{34}\cdot 3^{12}\cdot 6^{10}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $\log_a b$ jest wymierna czy niewymierna.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a = 2^{42}\cdot 3^{21} = 12^{21}$ oraz $b = 2^{44}\cdot 3^{22} = 12^{22}$, otrzymujemy

$$\log_a b = \frac{22}{21}\,,$$

co jest liczbą wymierną.

58. Dowieść, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m/n} = \frac{9}{8}\,,$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{m} = \left(\frac{9}{8}\right)^{n}\,,$$

$$8^n\cdot 3^m = 2^m\cdot 9^n\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$2^{3n}\cdot 3^m = 2^m\cdot 3^{2n}\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 3n &= &m \\ m &= &2n \end{cases}$$

Jednak powyższy układ równań nie ma rozwiązania w liczbach dodatnich m, n, gdyż dla takiego rozwiązania mielibyśmy

$$m=3n>2n=m\,,$$

czyli $m>m$, co nie może być prawdą.

Inne rozumowanie: rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$ nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(3/2)}\left(\frac{9}{8}\right)$ jest niewymierna.

59. Dowieść, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\dfrac{27}{25}\right)$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)$ jest wymierna i niech m/n będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia, bo podstawa logarytmu i liczba logarytmowana są większe od 1). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)=\frac{m}{n}\,,$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{m/n}=\frac{27}{25}\,,$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{m}=\left(\frac{27}{25}\right)^{n}\,,$$

$$9^m\cdot 25^n=27^n\cdot 5^m\,.$$

Wykażemy, że powyższe równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m, n.

Rozkładając obie strony powyższej równości na iloczyny potęg liczb pierwszych otrzymujemy

$$3^{2m}\cdot 5^{2n}=3^{3n}\cdot 5^m\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że wykładniki przy odpowiednich potęgach liczb pierwszych po obu stronach równości są równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases} 2m = 3n \\ 2n = m \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i stwierdzamy, że $3n=2m=4n$, skąd istnieje jedyne rozwiązanie rzeczywiste $m=n=0$, które nie jest rozwiązaniem w liczbach naturalnych.

Doszliśmy do sprzeczności z założeniem, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)$ jest wymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba $\log_{(9/5)}\left(\frac{27}{25}\right)$ jest niewymierna.

60. Dowieść, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wówczas otrzymujemy kolejno:

$$w=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\,,$$

$$w-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}\,,$$

$$\left(w-\sqrt{2}\right)^3=3\,,$$

$$w^3-3w^2\cdot\sqrt{2}+6w-2\sqrt{2}=3\,,$$

$$w^3+6w-3=\left(3w^2+2\right)\cdot\sqrt{2}\,,$$

$$\frac{w^3+6w-3}{3w^2+2}=\sqrt{2}\,,$$

co nie jest możliwe, gdyż po lewej stronie równości występuje liczba wymierna (zauważmay, że mianownik $3w^2+2$ jest różny od zera jako liczba dodatnia), a po prawej niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że błędne było założenie, że liczba $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ jest wymierna. Zatem liczba ta jest niewymierna.

61. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $a+b+c$ oraz $a^2+b^2+c^2$ są wymierne. Dowieść, że liczba $ab+bc+ca$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Teza zadania wynika ze wzoru

$$ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\,.$$

62. Podać przykład takiej liczby rzeczywistej dodatniej $x\neq 1$, że liczba $\log_x(x+10)$ jest wymierna.

Wskazówka: Załóż, że $\log_x(x+10)$ jest równe tak dobranej konkretnej liczbie wymiernej,

aby dało się wyliczyć x.
Uzasadnić poprawność podanego przykładu, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+10)$.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Zakładając, że
$$\log_x(x+10)=w\,,$$
otrzymujemy równanie
$$x^w=x+10\,. \tag{\#}$$
Wybieramy taką wartość wymierną w, abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać
$$x^2=x+10\,.$$
Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe[1] otrzymując
$$x=\frac{1\pm\sqrt{41}}{2}\,,$$
a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy
$$x=\frac{1+\sqrt{41}}{2}$$
i wówczas
$$\log_x(x+10)=\log_x x^2=2$$
jest liczbą wymierną.

Sposób II:

Postępujemy jak w sposobie I przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania
$$x^{-1}=x+10$$
mającego rozwiązanie dodatnie
$$x=\sqrt{26}-5\,.$$
Wówczas
$$\log_x(x+10)=\log_x x^{-1}=-1$$
jest liczbą wymierną.

63. Podać 4 przykłady liczb rzeczywistych dodatnich $x\neq1$, dla których liczba
$$\log_x(x+120)$$
jest wymierna.
Wsk.: Najpierw rozwiąż poprzednie zadanie lub zapoznaj się z jego rozwiązaniem.
Uzasadnić poprawność podanych przykładów, np. przez wyliczenie wartości $\log_x(x+120)$.

Rozwiązanie:

Przykład I:

Dla $x=5$ liczba $\log_x(x+120)=\log_5 125=3$ jest liczbą wymierną.

[1] Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

Przykład II:

Dla $x=8$ liczba $\log_x(x+120)=\log_8 128=\frac{7}{3}$ jest liczbą wymierną.

Przykład III:

Zakładając, że

$$\log_x(x+120)=w\,,$$

otrzymujemy równanie

$$x^w=x+120\,. \tag{\#}$$

Wybieramy taką wartość wymierną w, abyśmy umieli rozwiązać równanie (#) i liczymy na to, że znajdziemy rozwiązanie dodatnie. Dla $w=2$ równanie (#) przybiera postać

$$x^2=x+120\,.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie kwadratowe[2] otrzymując

$$x=\frac{1\pm\sqrt{481}}{2}\,,$$

a ponieważ interesuje nas rozwiązanie dodatnie, przyjmujemy

$$x=\frac{1+\sqrt{481}}{2}$$

i wówczas

$$\log_x(x+120)=\log_x x^2=2$$

jest liczbą wymierną.

Przykład IV:

Postępujemy jak w przykładzie III przyjmując $w=-1$, co prowadzi nas do równania

$$x^{-1}=x+120$$

mającego rozwiązanie dodatnie

$$x=\sqrt{3601}-60\,.$$

Wówczas

$$\log_x(x+120)=\log_x x^{-1}=-1$$

jest liczbą wymierną.

Inny sposób uzyskania tego przykładu: W równości

$$\log_{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=-1\,.$$

podstawiamy $n=3600$, skąd otrzymujemy $x=\sqrt{3601}-60$.

64. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych $n\geqslant 2$, że liczba

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\log_k(k+1)$$

jest wymierna.

Rozwiązanie:

[2]Standardowe rachunki są tu pominięte, ale na kolokwium powinny się znaleźć w rozwiązaniu.

Przyjmijmy $n=2^{2^m}-1$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas korzystając z równości $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$ otrzymujemy

$$\sum_{k=2}^{n}\log_2\log_k(k+1)=\log_2\prod_{k=2}^{n}\log_k(k+1)=\log_2\log_2(n+1)=\log_2\log_2 2^{2^m}=m\,.$$

65. Dowieść, że nie istnieje liczba wymierna $q>1$ spełniająca równość $q^q=16$.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy więc, że taka liczba q istnieje i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego m/n o naturalnym liczniku i mianowniku.

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m/n}=16\,,$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m}=16^n\,,$$

$$m^m=16^n\cdot n^m\,. \qquad (\heartsuit)$$

Dowód zostanie zakończony, jeżeli wykażemy, ze równanie $(\heartsuit)$ nie może być spełnione przez względnie pierwsze liczby naturalne m, n. Tę część dowodu można przeprowadzić różnymi sposobami.

Sposób I (najprostszy):

Liczba n nie może być równa 1, gdyż w takim przypadku równanie $(\heartsuit)$ przyjęłoby postać $m^m=16$, skąd wobec $2^2<16<3^3$ mielibyśmy $2<m<3$.

Zatem liczba n, jako liczba naturalna większa od 1, ma dzielnik pierwszy, oznaczmy go przez p. Wówczas prawa strona równości $(\heartsuit)$ jest podzielna przez p, a zatem lewa strona też jest podzielna przez p. Skoro jednak liczba m^m jest podzielna przez liczbę pierwszą p, to także m jest podzielne przez p, co przeczy założeniu, że liczby m i n są względnie pierwsze.

Sposób II (jeśli ktoś się zapatrzy na liczbę $16=2^4$ i nie dostrzeże sposobu I):

Ponieważ prawa strona równania $(\heartsuit)$ jest podzielna przez 2, to i lewa strona też jest podzielna przez 2, a w konsekwencji liczba m jest parzysta, a względnie pierwsza z nią liczba n jest nieparzysta. Niech k będzie wykładnikiem, z jakim liczba 2 wchodzi do rozkładu liczby m na iloczyn potęg liczb pierwszych. Porównując wykładniki, z jakimi dwójka występuje po obu stronach równości $(\heartsuit)$ otrzymujemy

$$km=4n, \quad \text{skąd} \quad \frac{m}{n}=\frac{4}{k}\,.$$

Wobec nierówności $m>n$ musi być $k\leqslant 3$, skąd para (m, n) jest jedną z par $(4, 1)$, $(2, 1)$, $(4, 3)$ (odpowiednio dla $k=1,2,3$).

To zostawia trzy potencjalne wartości q mogące spełniać daną w treści zadania równość, a mianowicie $q=4$, $q=2$ i $q=4/3$. Jednak bez trudu sprawdzamy, że żadna z tych liczb nie spełnia równania $q^q=16$, np. dlatego, że żadna nie wpada do przedziału $(2, 3)$.