

10. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$ zachodzi równość

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 4$ mamy

$$L = \binom{4}{4} = 1$$

oraz

$$P = \binom{5}{5} = 1.$$

Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1 = 1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n \geq 4$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+2}{5}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej równości i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L = \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n}{4} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+1}{5} + \binom{n+1}{4} = \binom{n+2}{5} = P.$$

Powyżej wykorzystaliśmy wzór

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

dla $m = n + 1$ oraz $k = 4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n \geq 4$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$.

11. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi równość

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \frac{6}{1333} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 2$ mamy

$$L = \frac{1}{3}$$

oraz

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Zatem dana w zadaniu równość przyjmuje postać $1/3 = 1/3$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz $n \geq 2$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \frac{6}{1333} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 + n + 1)}, \quad (\clubsuit)$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1$.

Wychodząc od lewej strony równości (\clubsuit) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3} + \frac{2}{21} + \frac{3}{91} + \frac{4}{273} + \frac{5}{651} + \dots + \frac{n-1}{(n-1)^4 + (n-1)^2 + 1} + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)} + \frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 - n + 1)} + \frac{n}{(n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n^2 + n + 1}{2 \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} + \frac{2n}{2 \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n^2 - n + 1}{2 \cdot (n^2 - n + 1) \cdot (n^2 + n + 1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot (n^2 + n + 1)} = P. \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego $n \geq 2$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu równość została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$.

12. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k < n$ spełniających równanie

$$k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na wartość współczynnika dwumianowego otrzymujemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!},$$

co po wstawieniu do równania danego w zadaniu prowadzi do

$$k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!}.$$

To z kolei daje kolejno równoważne postaci tego równania:

$$\begin{aligned} \frac{k}{k! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} &= \frac{1}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)!}, \\ \frac{k}{(n-k)} &= \frac{1}{(k+1)}, \\ k \cdot (k+1) &= n-k, \\ k \cdot (k+1) + k &= n, \\ k^2 + 2k &= n. \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

Zatem równanie dane w treści zadania jest równoważne równaniu (\spadesuit) . Stąd wynika, że rozwiązaniem tego równania jest każda para (k, n) , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną oraz $n = k^2 + 2k$.

13. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ lewa strona dowodzonej nierówności ma wartość 1, a prawa $12/10 = 6/5$. Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1 < 6/5$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 + (n+1)^4 < \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot (2n+3)}{10}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony nierówności (\clubsuit) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 + (n+1)^4 < \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{10} + (n+1)^4 = \\ &= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (n^2 \cdot (2n+1) + 10 \cdot (n+1)^2) = \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + n^2 + 10n^2 + 20n + 10) = \\ &= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 10). \end{aligned}$$

Z kolei prawą stronę nierówności (\clubsuit) możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} P &= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2 \cdot (2n+3)}{10} = \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (n+2)^2 \cdot (2n+3) = \\ &= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (n^2 + 4n + 4) \cdot (2n+3) = \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 8n^2 + 8n + 3n^2 + 12n + 12) = \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 12).$$

Stąd otrzymujemy

$$L < \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 10) < \frac{(n+1)^2}{10} \cdot (2n^3 + 11n^2 + 20n + 12) = P,$$

co kończy dowód drugiego kroku indukcyjnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

14. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+1) \cdot \binom{2n}{n} \geq 4^n.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $(n+1) \cdot \binom{2n}{n} = 4$ oraz $4^n = 4$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \geq 4$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+1) \cdot \binom{2n}{n} \geq 4^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+2) \cdot \binom{2n+2}{n+1} \geq 4^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+2) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+2)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+2)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+1) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+2)(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)^2} = (n+1) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \geq \\ &\geq 4^n \cdot \frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \geq 4^n \cdot 4 = 4^{n+1}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+2)(2n+1) \geq 4(n+1)(n+1),$$

$$(n+2)(2n+1) \geq 2(n+1)(n+1),$$

$$2n^2 + 5n + 2 \geq 2n^2 + 4n + 2,$$

$$n \geq 0,$$

a to jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej n .

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

15. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków \geq , \leq , a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+2) \cdot \binom{2n}{n} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $(n+2) \cdot \binom{2n}{n} = 3 \cdot 2 = 6$ oraz $3 \cdot 2^{2n-1} = 3 \cdot 2 = 6$, a zatem obie strony nierówności mają tę samą wartość. Tak więc dana w zadaniu nierówność jest prawdziwa bez względu na wybór kierunku nierówności.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+2) \cdot \binom{2n}{n} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1},$$

gdzie w powyższej i wszystkich występujących dalej nierównościach w miejscu kropek należy konsekwentnie wstawić wybrany znak nierówności. Chcemy wykazać, że

$$(n+3) \cdot \binom{2n+2}{n+1} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+3) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+3)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+3)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+2) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+3)(2n+1)(2n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = (n+2) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1} \cdot \frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \dots\dots\dots 3 \cdot 2^{2n-1} \cdot 4 = 3 \cdot 2^{2n+1}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+3)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \dots\dots\dots 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 2(n+3)(2n+1) \dots\dots\dots 4(n+2)(n+1), \\ (n+3)(2n+1) \dots\dots\dots 2(n+2)(n+1), \\ 2n^2 + 7n + 3 \dots\dots\dots 2n^2 + 6n + 4, \\ n \dots\dots\dots 1. \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla wszystkich $n \geq 1$, o ile w miejsce kropek wstawimy znak \geq .

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność dana w zadaniu, uzupełniona znakiem \geq , została udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n .

16. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} > 7 \cdot 4^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n = 1$ mamy

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} = 4 \cdot 2 = 8$$

oraz

$$7 \cdot 4^{n-1} = 7 \cdot 4^0 = 7,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $8 > 7$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+3) \cdot \binom{2n}{n} > 7 \cdot 4^{n-1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+4) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 7 \cdot 4^n.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} (n+4) \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{(n+4)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+4)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= (n+3) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+4)(2n+1)(2n+2)}{(n+3)(n+1)^2} = (n+3) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} > \\ &> 7 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 7 \cdot 4^{n-1} \cdot 4 = 7 \cdot 4^n, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+4)(2n+1) \geq 4(n+3)(n+1),$$

$$(n+4)(2n+1) \geq 2(n+3)(n+1),$$

$$2n^2 + n + 8n + 4 \geq 2(n^2 + n + 3n + 3),$$

$$2n^2 + 9n + 4 \geq 2n^2 + 8n + 6,$$

$$n \geq 2.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 2$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$. Sprawdzenie dla $n = 2$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$5 \cdot \binom{4}{2} = 5 \cdot 6 = 30 > 28 = 7 \cdot 4^1.$$

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$, a ponadto na początku rozwiązania wykonaliśmy bezpośrednio sprawdzenie dla $n = 1$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 2$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} \geq 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+4)(2n+1)}{(n+3)(n+1)} > 4, \quad (\spadesuit)$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 2$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 3$.

17. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $(n+4) \cdot \binom{2n}{n} = 10$ oraz $2^{2n+1} = 8$, a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $10 > 8$, jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+4) \cdot \binom{2n}{n} > 2^{2n+1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} > 2^{2n+3}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+5) \cdot \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(n+5)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(n+5)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= (n+4) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{(n+5)(2n+1)(2n+2)}{(n+4)(n+1)^2} = (n+4) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} > \\
&> 2^{2n+1} \cdot \frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geq 2^{2n+1} \cdot 4 = 2^{2n+3},
\end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(n+5)(2n+1) \geq 4(n+4)(n+1),$$

co kolejno przekształca się do

$$\begin{aligned}
(n+5)(2n+1) &\geq 2(n+4)(n+1), \\
2n^2 + 11n + 5 &\geq 2n^2 + 10n + 8,
\end{aligned}$$

czyli $n \geq 3$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$ oraz $n=3$. Sprawdzenie dla $n=3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$6 \cdot \binom{4}{2} = 36 > 32 = 2^5.$$

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$7 \cdot \binom{6}{3} = 7 \cdot 20 = 140 > 128 = 2^7.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$ oraz dla $n=2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} \geq 4$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(n+5)(2n+1)}{(n+4)(n+1)} > 4, \quad \spadesuit$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=4$.

18. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq 4^{2n-1}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy

$$L = 1 \cdot \binom{2}{1}^2 = 1 \cdot 2^2 = 4$$

oraz

$$P = 4^{2 \cdot 1 - 1} = 4^1 = 4.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \geq 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 \geq 4^{2n-1}. \quad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$(n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1}^2 \geq 4^{2n+1}. \quad (\diamond)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności (\clubsuit) można zapisać jako

$$n \cdot \binom{2n}{n}^2 = n \cdot \left(\frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \right)^2 = n \cdot \frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} = \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3}.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności (\diamond) i korzystając z założenia indukcyjnego (\clubsuit) otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= (n+1) \cdot \binom{2n+2}{n+1}^2 = (n+1) \cdot \frac{((2n+2)!)^2}{((n+1)!)^4} = (n+1) \cdot \frac{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}{(n-1)! \cdot n \cdot (n!)^3 \cdot (n+1)^4} = \\ &= \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3} \cdot (n+1) \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}{n \cdot (n+1)^4} = \frac{((2n)!)^2}{(n-1)! \cdot (n!)^3} \cdot \frac{(2n+1)^2 \cdot 2^2}{n \cdot (n+1)} \geq \\ &\geq 4^{2n-1} \cdot \frac{4 \cdot (2n+1)^2}{n \cdot (n+1)} \geq 4^{2n-1} \cdot 4^2 = 4^{2n+1} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{4 \cdot (2n+1)^2}{n \cdot (n+1)} \geq 4^2. \quad (\heartsuit)$$

Nierówność (\heartsuit) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 4 \cdot (2n+1)^2 &\geq 4^2 \cdot n \cdot (n+1), \\ (2n+1)^2 &\geq 4 \cdot n \cdot (n+1), \\ 4n^2 + 4n + 1 &\geq 4n^2 + 4n, \end{aligned}$$

$$1 \geq 0,$$

a zatem nierówność (\heartsuit) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności (\clubsuit) wynika nierówność (\diamond).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

19. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leq 4^n.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy

$$L = \binom{4}{1} = 4$$

oraz

$$P = 4^1 = 4.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 \leq 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} \leq 4^n. \quad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{2n+4}{n+1} \leq 4^{n+1}. \quad (\diamond)$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności (\clubsuit) można zapisać jako

$$\binom{2n+2}{n} = \frac{(2n+2)!}{n! \cdot (n+2)!}.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności (\diamond) i korzystając z założenia indukcyjnego (\clubsuit) otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= \binom{2n+4}{n+1} = \frac{(2n+4)!}{(n+1)! \cdot (n+3)!} = \frac{(2n+2)!}{n! \cdot (n+2)!} \cdot \frac{(2n+3) \cdot (2n+4)}{(n+1) \cdot (n+3)} \leq \\ &\leq 4^n \cdot \frac{(2n+3) \cdot (2n+4)}{(n+1) \cdot (n+3)} \leq 4^n \cdot 4 = 4^{n+1} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3) \cdot (2n+4)}{(n+1) \cdot (n+3)} \leq 4. \quad (\heartsuit)$$

Nierówność (\heartsuit) jest równoważna kolejnym nierównościami

$$(2n+3) \cdot (2n+4) \leq 4 \cdot (n+1) \cdot (n+3),$$

$$(2n+3) \cdot (n+2) \leq 2 \cdot (n+1) \cdot (n+3),$$

$$2n^2 + 7n + 6 \leq 2n^2 + 8n + 6,$$

$$0 \leq n,$$

a zatem nierówność (\heartsuit) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n .

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności (\clubsuit) wynika nierówność (\diamond) .

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

Sposób II:

Idea rozwiązania:

Wykażemy, że lewa strona dowodzonej nierówności, czyli liczba $\binom{2n+2}{n}$, jest sumą **czterech** liczb występujących w $2n$ -tym wierszu trójkąta Pascala (rozszerzonego do dolnej półpłaszczyzny umownymi zerami). Z kolei prawa strona dowodzonej nierówności jest sumą **wszystkich** wyrazów tego wiersza. Ponieważ wyrazy trójkąta Pascala są nieujemne, suma kilku wyrazów jednego wiersza nie przekracza sumy wszystkich wyrazów tego wiersza.

Rozwiązanie właściwe:

Korzystając ze wzorów

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} \quad \text{oraz} \quad \binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{2n+2}{n} &= \binom{2n+1}{n-1} + \binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} = \\ &= \binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} = \\ &= \sum_{k=n-2}^{n+1} \binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n, \end{aligned}$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Uwagi:

Dla $n=1$ składnik $\binom{2n}{n-2} = \binom{2}{-1}$ jest legalny i ma wartość 0.

Podobnie, poprawnym, choć może nieco dziwnym sposobem zapisania sumy $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ jest

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{2n}{k}.$$

Jeśli ktoś się brzydzi rozszerzaniem trójkąta Pascala przez wypełnienie dolnej półpłaszczyzny zerami, może po prostu sprawdzić prawdziwość dowodzonej nierówności dla $n=1$, a dalszą część rozumowania przeprowadzić dla $n \geq 2$ jak wyżej, bez konieczności odwoływania się do wyrazów rozszerzonego trójkąta Pascala równych 0.

20. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$\binom{2n+2}{n} = \binom{4}{1} = 4$$

oraz

$$\left(\frac{15}{4}\right)^n = \left(\frac{15}{4}\right)^1 = \frac{15}{4},$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4 > 15/4$, jest więc prawdziwa, gdyż $4 = 16/4$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+4}{n+1} > \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \binom{2n+4}{n+1} &= \frac{(2n+4)!}{(n+1)!(n+3)!} = \frac{(2n+2)!(2n+3)(2n+4)}{n!(n+1)(n+2)!(n+3)} = \binom{2n+2}{n} \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} > \\ &> \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geq \left(\frac{15}{4}\right)^n \cdot \frac{15}{4} = \left(\frac{15}{4}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geq \frac{15}{4}.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$4(2n+3)(2n+4) \geq 15(n+1)(n+3),$$

$$\begin{aligned}
4(4n^2 + 14n + 12) &\geq 15(n^2 + 4n + 3), \\
16n^2 + 56n + 48 &\geq 15n^2 + 60n + 45, \\
n^2 - 4n + 3 &\geq 0, \\
(n-1)(n-3) &\geq 0,
\end{aligned}$$

co jest prawdą dla wszystkich liczb całkowitych $n \neq 2$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n = 1$ oraz $n \geq 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego. Sprawdzenie dla $n = 2$ nie jest konieczne, gdyż drugi krok indukcyjny został przeprowadzony także dla $n = 1$, dowodząc tym samym implikacji $T(1) \Rightarrow T(2)$, gdzie $T(n)$ jest dowodzoną nierównością. Jednak bezpośrednie sprawdzenie danej w treści zadania nierówności dla $n = 2$ może być uznane za prostsze, niż powoływanie się na mini-dowód indukcyjny działający dla $n \leq 2$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym w dowodzie dla $n \geq 3$) Dla $n = 3$ dana w treści zadania nierówność przyjmuje postać:

$$\binom{8}{3} > \left(\frac{15}{4}\right)^3,$$

co jest kolejno równoważne nierównościom:

$$\begin{aligned}
56 &> \frac{15^3}{4^3}, \\
56 \cdot 64 &> 15^3, \\
28 \cdot 128 &> 3^3 \cdot 5^3, \\
28 \cdot 128 &> 27 \cdot 125,
\end{aligned}$$

a ta nierówność jest prawdziwa, gdyż czynniki w iloczynie po jej lewej stronie są większe od odpowiednich czynników po stronie prawej.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona w jednym dowodzie indukcyjnym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a w drugim dowodzie indukcyjnym dla $n \leq 2$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 3$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} \geq \frac{15}{4}$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+1)(n+3)} > \frac{15}{4},$$



to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 3$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 4$.

21. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{25} \cdot \binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27} \cdot \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} = \frac{(5n)!}{n! \cdot (4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{(2n)! \cdot (2n)!} = \frac{(5n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (2n)!}$$

oraz

$$\binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n} = \frac{(5n)!}{(2n)! \cdot (3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} = \frac{(5n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (2n)!},$$

skąd

$$\binom{5n}{n} \cdot \binom{4n}{2n} = \binom{5n}{2n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$\sqrt[n]{25} < \sqrt[n]{27},$$

jest więc prawdziwa jako nierówność $25 < 27$ podniesiona obustronnie do dodatniej potęgi $1/n$.

Uwagi

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n , nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).

22. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{65} \cdot n \leq 2^n + 2^{71}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 64$.

Dla $n \leq 64$ zachodzą nierówności

$$2^{65} \cdot n \leq 2^{65} \cdot 64 = 2^{65} \cdot 2^6 = 2^{71} < 2^n + 2^{71},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 65$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 65$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 2^{65} \cdot 65,$$

$$P = 2^{65} + 2^{71} = 2^{65} + 2^6 \cdot 2^{65} = 2^{65} + 64 \cdot 2^{65} = 65 \cdot 2^{65},$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geq 65$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{65} \cdot n \leq 2^n + 2^{71}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{65} \cdot (n+1) \leq 2^{n+1} + 2^{71}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 65$ otrzymujemy

$$L = 2^{65} \cdot (n+1) = 2^{65} \cdot n + 2^{65} \leq 2^n + 2^{71} + 2^{65} \leq 2^n + 2^{71} + 2^n = 2^{n+1} + 2^{71} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

23. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ mamy $L = 8$ oraz $P = 6$, skąd $L > P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n}.$$

Wykażemy, że wówczas

$$2^{2n+2} \cdot \binom{2n+2}{n+1} > \binom{4n+4}{2n+2}. \quad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości (\clubsuit) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} L &= 2^{2n+2} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = 4 \cdot 2^{2n} \cdot \frac{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{(n!)^2 \cdot (n+1)^2} = 2^{2n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} > \\ &> \binom{4n}{2n} \cdot \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} = \frac{(4n)!}{((2n)!)^2} \cdot \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq \\ &\geq \frac{(4n)! \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}{((2n)!)^2 \cdot (2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2} = \frac{(4n+4)!}{((2n+2)!)^2} = \binom{4n+4}{2n+2} = P, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} \geq \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2}. \quad (\heartsuit)$$

Przekształcanie nierówności (\heartsuit) prowadzi do kolejnych nierówności równoważnych:

$$\begin{aligned} \frac{8 \cdot (2n+1)}{n+1} &\geq \frac{2 \cdot (4n+1) \cdot (4n+3)}{(2n+1) \cdot (n+1)}, \\ 4 \cdot (2n+1) &\geq \frac{(4n+1) \cdot (4n+3)}{2n+1}, \\ 4 \cdot (2n+1)^2 &\geq (4n+1) \cdot (4n+3), \\ 16n^2 + 16n + 4 &\geq 16n^2 + 16n + 3, \\ 1 &\geq 0, \end{aligned}$$

a zatem nierówność (\heartsuit) jest prawdziwa dla każdej liczby n .

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n .

24. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$3^{28} \cdot n \leq 3^n + 3^{31}.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leq 27$.

Dla $n \leq 27$ zachodzą nierówności

$$3^{28} \cdot n \leq 3^{28} \cdot 27 = 3^{28} \cdot 3^3 = 3^{31} < 3^n + 3^{31},$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geq 28$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 28$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$\begin{aligned} L &= 3^{28} \cdot 28, \\ P &= 3^{28} + 3^{31} = 3^{28} + 27 \cdot 3^{28} = 28 \cdot 3^{28}, \end{aligned}$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geq 28$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$3^{28} \cdot n \leq 3^n + 3^{31}.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$3^{28} \cdot (n+1) \leq 3^{n+1} + 3^{31}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geq 28$ otrzymujemy

$$L = 3^{28} \cdot (n+1) = 3^{28} \cdot n + 3^{28} \leq 3^n + 3^{31} + 3^{28} \leq 3^n + 3^{31} + 3^n = 2 \cdot 3^n + 3^{31} < \\ < 3 \cdot 3^n + 3^{31} = 3^{n+1} + 3^{31} = P,$$

co kończy dowód indukcyjny.

25. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$n \cdot \binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} < (n+1) \cdot \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \frac{(6n)!}{(2n)! \cdot (4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{n! \cdot (3n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!}$$

oraz

$$\binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n} = \frac{(6n)!}{(3n)! \cdot (3n)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!} = \frac{(6n)!}{n! \cdot (2n)! \cdot (3n)!},$$

skąd

$$\binom{6n}{2n} \cdot \binom{4n}{n} = \binom{6n}{3n} \cdot \binom{3n}{n}.$$

Wobec tego dana w treści zadania nierówność upraszcza się do nierówności

$$n < n+1,$$

jest więc prawdziwa.

Uwagi

Ponieważ obie strony dowodzonej nierówności mają postać iloczynową, a iloraz większej do mniejszej maleje wraz z n , nie wydaje się możliwe udowodnienie implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$, gdzie $T(n)$ jest nierównością z treści zadania, w inny sposób niż poprzez bezpośrednie udowodnienie następnika bez odwoływania się do założenia o prawdziwości poprzednika. Tym samym każde zastosowanie indukcji jest albo błędne (dowód *udał się* dzięki błędom rachunkowym), albo lipne (mimo ubrania dowodu w szatę indukcji, i tak dana nierówność jest dowodzona bezpośrednio).

26. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geq \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{2}{2} = 1$$

oraz

$$\frac{3^{n-1}}{2} = \frac{1}{2},$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$1 > \frac{1}{2},$$

jest więc prawdziwa.

Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geq \frac{3^{n-1}}{2}.$$

Chcemy wykazać, że

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} \geq \frac{3^n}{2}.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(n+2)} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)} \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+2)} > \\ &> \frac{3^{n-1}}{2} \cdot \frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geq \frac{3^{n-1}}{2} \cdot 3 = \frac{3^n}{2}, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geq 3.$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności

$$2(2n+1) \geq 3(n+2),$$

co kolejno przekształca się do

$$4n+2 \geq 3n+6,$$

czyli $n \geq 4$.

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 4$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$, $n=3$ oraz $n=4$. Sprawdzenie dla $n=4$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ oraz $n=3$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadkach, które dotąd nie zostały sprawdzone, ani też nie wynikają z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{4}{2}}{3} = \frac{6}{3} = 2 > \frac{3}{2} = \frac{3^1}{2}.$$

Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{6}{3}}{4} = \frac{20}{4} = 5 > \frac{9}{2} = \frac{3^2}{2}.$$

Dla $n = 4$ otrzymujemy

$$\frac{\binom{8}{4}}{5} = \frac{70}{5} = 14 > \frac{27}{2} = \frac{3^3}{2}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 4$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n = 1$, $n = 2$ oraz dla $n = 3$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n = 4$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} \geq 3$$

pojawi się nierówność

$$\frac{2(2n+1)}{(n+2)} > 3, \quad \spadesuit$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n > 4$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n = 5$.

Chociaż nie jest to od razu widoczne, ani też nie jest istotne dla tego zadania, liczby $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ są całkowite. Chcesz wiedzieć więcej? Poszukaj hasła **Liczby Catalana**.

27. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n} \cdot \sqrt{15n+4} < 9 \cdot 4^{n-1}.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n = 1$ mamy

$$L = \binom{2n}{n} \cdot \sqrt{15n+4} = 2 \cdot \sqrt{19}$$

oraz

$$P = 9 \cdot 4^{n-1} = 9 \cdot 4^0 = 9,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $2 \cdot \sqrt{19} < 9$, czyli $\sqrt{76} < \sqrt{81}$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{2n}{n} \cdot \sqrt{15n+4} < 9 \cdot 4^{n-1}.$$

Chcemy wykazać, że

$$\binom{2n+2}{n+1} \cdot \sqrt{15n+19} < 9 \cdot 4^n.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sqrt{15n+19} \cdot \binom{2n+2}{n+1} &= \frac{\sqrt{15n+19}(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{\sqrt{15n+19}(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= \sqrt{15n+4} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{\sqrt{15n+19}(2n+1)(2n+2)}{\sqrt{15n+4}(n+1)^2} = \sqrt{15n+4} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{2\sqrt{15n+19}(2n+1)}{\sqrt{15n+4}(n+1)} < \\ &< 9 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{2\sqrt{15n+19}(2n+1)}{\sqrt{15n+4}(n+1)} \leq 9 \cdot 4^{n-1} \cdot 4 = 9 \cdot 4^n, \end{aligned}$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2\sqrt{15n+19}(2n+1)}{\sqrt{15n+4}(n+1)} \leq 4.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$\begin{aligned} 2\sqrt{15n+19}(2n+1) &\leq 4\sqrt{15n+4}(n+1), \\ \sqrt{15n+19}(2n+1) &\leq 2\sqrt{15n+4}(n+1), \\ (15n+19) \cdot (2n+1)^2 &\leq 4 \cdot (15n+4) \cdot (n+1)^2, \\ 60n^3 + 136n^2 + 91n + 19 &\leq 60n^3 + 136n^2 + 92n + 16, \\ 3 &\leq n. \end{aligned}$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n \geq 3$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n = 2$ i $n = 3$. Sprawdzenie dla $n = 3$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n = 2$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadku, który dotąd nie został sprawdzony, ani też nie wynika z dowodu indukcyjnego.

Dla $n = 2$ otrzymujemy

$$L = \binom{4}{2} \cdot \sqrt{34} = 6 \cdot \sqrt{34} < 6 \cdot \sqrt{36} = 36 \quad \text{oraz} \quad P = 9 \cdot 4^1 = 36,$$

skąd $L < P$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n = 3$ otrzymujemy

$$L = \binom{6}{3} \cdot \sqrt{49} = 20 \cdot 7 = 140 \quad \text{oraz} \quad P = 9 \cdot 4^2 = 144,$$

skąd $L < P$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednio sprawdzenie dla $n = 1$ i $n = 2$.