564. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \ < \ \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \ < \ \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ dowodzone nierówności przyjmują postać

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2} \ < \ 1 \ < \ \frac{2}{3}\cdot 2\,,$$

wystarczy więc zauważyć, że

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}}<1$$

oraz

$$\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}>1\,.$$

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwe są nierówności

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} \ < \ \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} \ < \ \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,. \qquad (\clubsuit)$$

Udowodnimy, że wówczas analogiczne nierówności są prawdziwe po zastąpieniu liczby n liczbą $n+1$, a mianowicie

$$\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2} \ < \ \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \ < \ \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,. \quad (\diamondsuit)$$

W celu dowodu lewej nierówności ($\diamondsuit$) skorzystamy z lewej nierówności założenia indukcyjnego ($\clubsuit$). Otrzymujemy

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu lewej nierówności ($\diamondsuit$) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2}\,. \qquad (\spadesuit)$$

Przekształcanie nierówności ($\spadesuit$) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+2}\,, \qquad \Big|:\sqrt{n+1}$$

$$\frac{2}{3}\cdot n+1\geqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$

$$n+\frac{3}{2}\geqslant\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$

$$\frac{(n+1)+(n+2)}{2}\geqslant\sqrt{(n+1)\cdot(n+2)}\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $n+1$ i $n+2$.

Analogicznie postępujemy dla dowodu prawej nierówności (♢). Korzystając z prawej nierówności założenia indukcyjnego (♣) otrzymujemy

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu prawej nierówności (♢) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,. \qquad (♠♠)$$

Przekształcanie nierówności (♠♠) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)+\sqrt{n+1}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+2)\,, \qquad \Big| :\sqrt{n+1}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{n\cdot(n+1)}+1\leqslant\frac{2}{3}\cdot(n+2)\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}+\frac{3}{2}\leqslant n+2\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}\leqslant n+\frac{1}{2}\,,$$

$$\sqrt{n\cdot(n+1)}\leqslant\frac{n+(n+1)}{2}\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb n i $n+1$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dane w zadaniu nierówności zostały udowodnione dla każdej liczby naturalnej n.

565. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n} \;<\; \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3} \;<\; \frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ dowodzone nierówności przyjmują postać

$$\frac{2}{5}\cdot 2 \;<\; 1 \;<\; \frac{2}{5}\cdot 2\sqrt{2}\,,$$

wystarczy więc zauważyć, że

$$\frac{4}{5}<1$$

oraz

$$\frac{4\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{25}}>1\,.$$

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że prawdziwe są nierówności

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n} \;<\; \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3} \;<\; \frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}\,. \qquad (1)$$

Udowodnimy, że wówczas analogiczne nierówności są prawdziwe po zastąpieniu liczby n liczbą $n+1$, a mianowicie

$$\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+1} \;<\; \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k^3} \;<\; \frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}\,. \qquad (2)$$

W celu dowodu lewej nierówności (2) skorzystamy z lewej nierówności założenia indukcyjnego (1). Otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k^3}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3}+\sqrt{(n+1)^3}>\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^3}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu lewej nierówności (2) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^3}\geqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+1}\,. \qquad (3)$$

Przekształcanie nierówności (3) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n}+\sqrt{(n+1)^3}\geqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+1}\,, \qquad \Big|:\sqrt{(n+1)^3}$$

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+1\geqslant\frac{2}{5}\cdot(n+2)\,,$$

$$\frac{2\cdot n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+5\geqslant 2\cdot(n+2)\,,$$

$$\frac{2\cdot n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\geqslant 2n-1\,,$$

$$2\cdot n\cdot\sqrt{n}\geqslant(2n-1)\cdot\sqrt{n+1}\,,$$

$$4\cdot n^3\geqslant(2n-1)^2\cdot(n+1)\,,$$

$$(2n)^3\geqslant(2n-1)^2\cdot(2n+2)\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako odpowiednio przekształcona nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $2n-1$, $2n-1$ i $2n+2$.

Analogicznie postępujemy dla dowodu prawej nierówności (2). Korzystając z prawej nierówności założenia indukcyjnego (1) otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k^3}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3}+\sqrt{(n+1)^3}<\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{(n+1)^3}\,,$$

a więc do zakończenia dowodu prawej nierówności (2) wystarczy dowieść, że

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{(n+1)^3}\leqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}\,. \qquad (4)$$

Przekształcanie nierówności (4) prowadzi kolejno do nierówności równoważnych:

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}+\sqrt{(n+1)^3}\leqslant\frac{2}{5}\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}\,, \qquad \Big|:\sqrt{(n+1)^3}$$

$$\frac{2}{5}\cdot n+1\leqslant\frac{2}{5}\cdot\frac{(n+2)\cdot\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\,,$$

$$2\cdot n+5\leqslant\frac{2\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\,,$$
$$(2n+5)\cdot\sqrt{n+1}\leqslant 2\cdot(n+2)\cdot\sqrt{n+2}\,,$$
$$(2n+5)^2\cdot(n+1)\leqslant 4\cdot(n+2)^3\,,$$
$$2\cdot(2n+5)^2\cdot(n+1)\leqslant 8\cdot(n+2)^3\,,$$
$$(2n+5)^2\cdot(2n+2)\leqslant(2n+4)^3\,,$$

a ta nierówność jest prawdziwa jako odpowiednio przekształcona nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $2n+5$, $2n+5$ i $2n+2$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej dane w zadaniu nierówności zostały udowodnione dla każdej liczby naturalnej n.

566. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz $D\leqslant 11C$ i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant D\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (rzemieślniczy, ale skuteczny):

Dla liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $|x|\geqslant 1$ wykonujemy standardowe szacowania od góry i od dołu oparte na nierównościach $0\leqslant 1\leqslant x^{2014}$:

$$\frac{1}{11}=\frac{x^{2014}+0}{8x^{2014}+3x^{2014}}\leqslant\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant\frac{x^{2014}+2x^{2014}}{8x^{2014}+0}=\frac{3}{8}\,.$$

Z kolei dla liczb x spełniających nierówność $|x|<1$ analogiczne szacowanie musi uwzględniać odwrócenie kierunku nierówności między potęgami liczby x, gdyż wtedy zachodzą nierówności $0\leqslant x^{2014}\leqslant 1$. Szacowania wyglądają wówczas następująco:

$$\frac{2}{11}=\frac{0+2}{8+3}\leqslant\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant\frac{1+2}{0+3}=1\,.$$

Z powyższych oszacowań wynikają nierówności

$$C\leqslant\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant D\,,$$

gdzie $C=\min(1/11,\,2/11)=1/11$ oraz $D=\max(3/8,\,1)=1=11C$.

Sposób II (nieco trikowy i prostszy rachunkowo, ale trudny do zastosowania dla bardziej skomplikowanych wyrażeń):

Wykonujemy szacowania na poziomie licznika w taki sposób, aby w liczniku otrzymać współczynniki proporcjonalne do współczynników w mianowniku:

$$\frac{1}{8}=\frac{x^{2014}+\frac{3}{8}}{8x^{2014}+3}\leqslant\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant\frac{\frac{16}{3}x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}=\frac{2}{3}\,.$$

Z powyższych oszacowań wynikają nierówności

$$C \leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3} \leqslant D\,,$$

gdzie $C=1/8$ oraz $D=2/3=\frac{16}{3}C<11C$.

Sposób III (analogiczny do sposobu II, tylko szacujemy mianownik zamiast licznika):
Wykonujemy szacowania na poziomie mianownika w taki sposób, aby w mianowniku otrzymać współczynniki proporcjonalne do współczynników w liczniku:

$$\frac{1}{8}=\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+16} \leqslant \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3} \leqslant \frac{x^{2014}+2}{\frac{3}{2}x^{2014}+3}=\frac{2}{3}\,,$$

co prowadzi do identycznych oszacowań jak w sposobie II.

Sposób IV (w duchu podobny do sposobów II i III, ale trochę bardziej naturalny i dający pełną kontrolę nad zbiorem wartości danego wyrażenia):
Przepisujemy dane w zadaniu wyrażenie w postaci zawierającej zmienną x tylko w jednym miejscu:

$$\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}=\frac{x^{2014}+\frac{3}{8}+\frac{13}{8}}{8x^{2014}+3}=\frac{1}{8}+\frac{\frac{13}{8}}{8x^{2014}+3}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Mianownik ostatniego składnika przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[3,+\infty)$, a zatem iloraz $\dfrac{13/8}{8x^{2014}+3}$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $(0,13/24]$. W konsekwencji zbiór możliwych wartości wyrażenia $(\clubsuit)$ jest przedziałem $(1/8,2/3]$.

Zatem zachodzą nierówności

$$\frac{1}{8} < \frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3} \leqslant \frac{2}{3}\,,$$

których nie można poprawić.

Rozwiązanie jest zakończone ze stałymi C i D jak w sposobach II i III.

567. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ zachodzi nierówność

$$n^{n+1} > (n+1)^n\,.$$

Rozwiązanie:
Dana w zadaniu nierówność jest równoważna nierówności

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}\,,$$

czyli

$$f(n) > f(n+1)\,, \qquad (*)$$

gdzie

$$f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{1/x}\,.$$

Ponieważ jednak

$$f'(x)=x^{1/x}\cdot\frac{d}{dx}\ln x^{1/x}=x^{1/x}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\ln x}{x}=\sqrt[x]{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}<0 \qquad \text{dla} \qquad x>e\,,$$

funkcja f jest malejąca w przedziale $(e,+\infty)$, skąd otrzymujemy $(*)$ dla $n \geqslant 3$.

568. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n+3^{2n}}{9^n}+\frac{5^{n+1}+3^{2n-1}}{9^{n-1}\cdot 25}+\frac{5^{n+2}+3^{2n-2}}{9^{n-2}\cdot 25^2}+\ldots+\frac{5^{n+k}+3^{2n-k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}+\ldots+\frac{5^{2n}+3^n}{25^n}\right).$$

Rozwiązanie:

Zapisujemy wyrażenie pod znakiem granicy w postaci sumy dwóch postępów geometrycznych, obliczamy ich sumy, a następnie przechodzimy do granicy:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{5^{n+k}+3^{2n-k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{5^{n+k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{2n-k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{9}\right)^n\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{25}\right)^k=$$

$$=\left(\frac{5}{9}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{9}{5}\right)^{n+1}-1}{\frac{9}{5}-1}+\frac{\left(\frac{3}{25}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{25}-1}=\frac{\frac{9}{5}-\left(\frac{5}{9}\right)^n}{4/5}+\frac{\left(\frac{3}{25}\right)^{n+1}-1}{-22/25}\to\frac{9/5}{4/5}+\frac{-1}{-22/25}=$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{25}{22}=\frac{99+50}{44}=\frac{149}{44}\,.$$

569. Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+6)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $12n+36$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{12n+36}{(n+6)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{12n+36}{(n+6)^2}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+2+3+4+\ldots+(12n+36)}{n^2+0} = \frac{1+2+3+4+\ldots+(12n+36)}{n^2} = c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+3} + \frac{4}{n^2+4} + \ldots + \frac{12n+36}{(n+6)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1+2+3+4+\ldots+(12n+36)}{(n+6)^2} = a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(12n+36) = \frac{(12n+36)\cdot(12n+37)}{2} = (6n+18)\cdot(12n+37)\,.$$

Wobec tego

$$c_n = \frac{(6n+18)\cdot(12n+37)}{n^2} \to 72$$

przy $n \to \infty$. Podobnie

$$a_n = \frac{(6n+18)\cdot(12n+37)}{(n+6)^2} \to 72$$

przy $n \to \infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 72$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 72\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 72\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 72.

570. Udowodnić, że równanie

$$10^x = x \cdot 7^x$$

ma co najmniej dwa rozwiązania rzeczywiste.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję pomocniczą $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = 10^x - x\cdot 7^x\,.$$

Funkcja ta jest ciągła, a ponadto zachodzą nierówności:

$$f(2) = 10^2 - 2\cdot 7^2 = 100 - 98 > 0\,,$$

$$f(3) = 10^3 - 3\cdot 7^3 = 1000 - 3\cdot 343 < 0$$

oraz

$$f(4)=10^4-4\cdot 7^4=100^2-98^2>0\,.$$

Z własności Darboux funcji ciągłych wynika, że funkcja f przyjmuje wartość 0 w przedziale $(2,\,3)$ oraz w przedziale $(3,\,4)$. Pozostaje odnotować, że punkty zerowania się funkcji f są rozwiązaniami równania danego w treści zadania.

571. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej $x\in(0,\,2)$ spełniającej nierówność

$$x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}>1\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (dla myślących śmiertelników):

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2015\cdot x^{2014}\cdot(x-2)^{2016}+2016\cdot x^{2015}\cdot(x-2)^{2015}\,.$$

Ponieważ

$$f(1)=1 \qquad \text{oraz} \qquad f'(1)=2015-2016=-1\neq 0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie 1 wartość 1, która nie jest ekstremum lokalnym (bo $f'(1)\neq 0$). W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu jedynki także wartość większą od 1.

Sposób II (dla bezmyślnych cudotwórców):

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}\,.$$

Zamiast wyciągać wnioski na podstawie analizy przebiegu powyższej funkcji, bezmyśnie uczepimy się miejsca, w którym pochodna tej funkcji się zeruje, a sama funkcja osiąga maksimum.

Pochodna funkcji f wyraża się wzorem

$$f'(x)=2015\cdot x^{2014}\cdot(x-2)^{2016}+2016\cdot x^{2015}\cdot(x-2)^{2015}=$$
$$=2015\cdot x^{2014}\cdot(2-x)^{2016}-2016\cdot x^{2015}\cdot(2-x)^{2015}=$$
$$=x^{2014}\cdot(2-x)^{2015}\cdot(2015\cdot(2-x)-2016\cdot x)=x^{2014}\cdot(2-x)^{2015}\cdot(4030-4031\cdot x)\,.$$

Zatem na przedziale $(0,\,2)$ pochodna funkcji f ma następujący znak:

$$f'(x)\begin{cases}>0 & \text{dla} \quad x\in\left(0,\,\frac{4030}{4031}\right)\\ =0 & \text{dla} \quad x=\frac{4030}{4031}\\ <0 & \text{dla} \quad x\in\left(\frac{4030}{4031},\,2\right)\end{cases}$$

Oznacza to, że funkcja f osiąga na przedziale $(0,\,2)$ największą wartość w punkcie $x=\frac{4030}{4031}$ i wartością tą jest

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)=\left(\frac{4030}{4031}\right)^{2015}\cdot\left(\frac{4032}{4031}\right)^{2016}=\frac{4030^{2015}\cdot 4032^{2016}}{4031^{4031}}\,.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy "tylko" udowodnić nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right)>1$. Problem polega na tym, że w rzeczywistości $f\left(\frac{4030}{4031}\right)\approx 1,000124$.

Aby wykazać nierówność $f\left(\frac{4030}{4031}\right)>1$, należałoby udowodnić, że

$$4030^{2015}\cdot 4032^{2016}>4031^{4031}\,, \qquad (\clubsuit)$$

co jest praktycznie niewyobrażalne bez użycia komputera, gdyż po obu stronach tej nierówności występują liczby 14534-cyfrowe, a ich iloraz jest w przybliżeniu równy $1,000124$.

Cudotwórca przepisałby nierówność ($\clubsuit$) w postaci

$$(2n)^n\cdot(2n+2)^{n+1}>(2n+1)^{2n+1}\,,$$

gdzie $n=2015$, a następnie przemnożył ją stronami przez $2n$ otrzymując kolejno nierówności równoważne:

$$(2n)^{n+1}\cdot(2n+2)^{n+1}>(2n+1)^{2n+1}\cdot(2n)\,,$$

$$((2n)\cdot(2n+2))^{n+1}>\left((2n+1)^2\right)^n\cdot(2n+1)\cdot(2n)\,,$$

$$\left(4n^2+4n\right)^{n+1}>\left(4n^2+4n+1\right)^n\cdot\left(4n^2+2n\right)\,. \qquad (\diamondsuit)$$

W tym momencie cudotwórca zauważyłby, że po każdej ze stron nierówności ($\diamondsuit$) znajduje się iloczyn $n+1$ czynników dodatnich. Gdyby sumy czynników po każdej ze stron były równe, większy byłby iloczyn o wszystkich czynnikach równych, czyli iloczyn po lewej stronie nierówności ($\diamondsuit$). Tymczasem jest nawet lepiej, gdyż suma czynników po lewej stronie nierówności ($\diamondsuit$) jest równa

$$\left(4n^2+4n\right)\cdot(n+1)=4n^3+8n^2+4n\,,$$

a po prawej jest od niej mniejsza i wynosi

$$\left(4n^2+4n+1\right)\cdot n+\left(4n^2+2n\right)=4n^3+8n^2+3n\,.$$

Dowód nierówności ($\clubsuit$) jest więc zakończony.

Uwaga:

Cudotwórca zamiast nierówności ($\diamondsuit$) udowodniłby nierówność mocniejszą, a mianowicie

$$\left(4n^2+4n\right)^{n+1}>\left(4n^2+4n+1\right)^n\cdot\left(4n^2+3n\right)\,,$$

co prowadzi do wzmocnionej wersji nierówności ($\clubsuit$):

$$4030^{2015}\cdot 4032^{2016}>4031^{4030}\cdot 4031,5\,,$$

w której iloraz strony lewej do prawej jest w przybliżeniu równy 1,00000000769 (bezpośrenio po przecinku występuje osiem zer). To doprowadziłoby do nierówności

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)>\frac{4031,5}{4031}=1+\frac{1}{8062}\approx\mathbf{1,0001240}387\,,$$

gdy tymczasem w rzeczywistości

$$f\left(\frac{4030}{4031}\right)\approx\mathbf{1,0001240}463\,.$$

572. Udowodnić, że równanie

$$x^{2019}\cdot(x-2)^{2018}=1$$

ma co najmniej trzy rozwiązania.

Rozwiązanie:

Niech

$$f(x)=x^{2019}\cdot(x-2)^{2018}\,.$$

Zauważmy, że $f(1)=1$ oraz

$$f'(x)=2019\cdot x^{2018}\cdot(x-2)^{2018}+2018\cdot x^{2019}\cdot(x-2)^{2017}=$$
$$=(2019(x-2)+2018x)\cdot x^{2018}\cdot(x-2)^{2017}\,,$$

skąd $f'(1)=1$.

Stąd wynika, że funkcja f przyjmuje wartości większe od 1 w prawostronnym otoczeniu jedynki, a ponieważ $f(2)=0$, na mocy własności Darboux funkcji ciągłych wnioskujemy, że f przyjmuje wartość 1 w przedziale $(1,2)$.

Pozostaje zauważyć, że $f(3)>1$, wobec czego funkcja f przyjmuje wartość 1 w przedziale $(2,3)$.

Wobec tego f przyjmuje wartość 1 co najmniej trzykrotnie: w punkcie 1, w przedziale $(1,2)$ i w przedziale $(2,3)$.

573. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2017}(3x)\cdot\sin x>\frac{1}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sin^{2017}(3x)\cdot\sin x\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2017\cdot\sin^{2016}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3\cdot\sin x+\sin^{2017}(3x)\cdot\cos x=$$
$$=6051\cdot\sin^{2016}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot\sin x+\sin^{2017}(3x)\cdot\cos x\,.$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=6051\cdot\sin^{2016}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\sin^{2017}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=6051\cdot1\cdot0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/6$ wartość $1/2$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/6)\neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/6$ także wartość większą od $1/2$.

Uwaga:

Ponieważ $f'(\pi/6)>0$, funkcja f ma maksimum lokalne (i jak się okazuje, globalne) na prawo od $\pi/6$. Jednak dokładniejsze jego zbadanie bez użycia komputera okazuje się niezwykle trudne. Pochodna funkcji f zeruje się bowiem w punkcie (w przybliżeniu) $\frac{\pi}{6}+0,0000954$, a sama funkcja f osiąga tam maksimum w przybliżeniu równe $0,5000413$. Jest to wartość tak nieznacznie przekraczająca $1/2$, że niewyobrażalne wydaje się rozwiązanie zadania przez bezpośrednie szacowanie wartości funkcji f w konkretnym punkcie.

Jeśli posuniemy się nieco dalej na prawo od punktu $\pi/6$, zobaczymy, że funkcja f dosyć szybko maleje, mamy na przykład

$$f\left(\frac{\pi}{6}+0,001\right)\approx 0,49634$$

oraz

$$f\left(\frac{\pi}{6}+0,01\right)\approx 0,20519\,.$$

574. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2019}(3x)\cdot\sin(5x)>\frac{1}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sin^{2019}(3x)\cdot\sin(5x)\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2019\cdot\sin^{2018}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3\cdot\sin(5x)+\sin^{2019}(3x)\cdot\cos(5x)\cdot 5=$$
$$=6057\cdot\sin^{2018}(3x)\cdot\cos(3x)\cdot\sin(5x)+5\cdot\sin^{2019}(3x)\cdot\cos(5x)\,.$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=6057\cdot\sin^{2018}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}+5\cdot\sin^{2019}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}=$$
$$=6057\cdot 1\cdot 0\cdot\frac{1}{2}+5\cdot 1\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{5\sqrt{3}}{2}\neq 0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/6$ wartość $1/2$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/6)\neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/6$ także wartość większą od $1/2$.

575. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 4$ zachodzi nierówność

$$\binom{n+3}{7}<\frac{n^7}{7!}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z równości

$$\binom{n+3}{7}=\frac{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{7!}$$

zapiszemy dowodzoną nierówność w postaci

$$\frac{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{7!}<\frac{n^7}{7!}\,.$$

Tezę zadania otrzymujemy mnożąc stronami trzy nierówności

$$(n-3)\cdot(n+3)<n^2\,,$$
$$(n-2)\cdot(n+2)<n^2\,,$$
$$(n-1)\cdot(n+1)<n^2$$

oraz równość

$$\frac{n}{7!}=\frac{n}{7!}\,.$$

Należy wyjaśnić, że nierówność

$$(n-k)\cdot(n+k)<n^2$$

wynika łatwo ze wzoru na różnicę kwadratów

$$(n-k)\cdot(n+k)=n^2-k^2<n^2\,.$$

Można ją też otrzymać powołując się na nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną dwóch liczb w następującej wersji: Iloczyn dwóch liczb dodatnich o ustalonej sumie jest największy, gdy liczby te są równe.

576. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} i^7<\frac{n^4\cdot(n+1)^4}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy $L=1$ oraz $P=2$, skąd $L<P$.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\sum_{i=1}^{n} i^7<\frac{n^4\cdot(n+1)^4}{8}\,.$$

Wykażemy, że wówczas

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^7<\frac{(n+1)^4\cdot(n+2)^4}{8}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wychodząc od lewej strony równości ($\clubsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$L=\sum_{i=1}^{n+1} i^7=\sum_{i=1}^{n} i^7+(n+1)^7<\frac{n^4\cdot(n+1)^4}{8}+(n+1)^7=\frac{(n+1)^4}{8}\cdot\left(n^4+8\cdot(n+1)^3\right)=$$

$$=\frac{(n+1)^4}{8}\cdot\left(n^4+8n^3+24n^2+24n+8\right)<$$

$$< \frac{(n+1)^4}{8} \cdot \left(n^4+8n^3+24n^2+32n+16\right) = \frac{(n+1)^4 \cdot (n+2)^4}{8} = P\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony dla każdego n naturalnego.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

577. Liczby wymierne dodatnie a i b spełniają warunek $a^b=2$. Dowieść, że liczby a i $1/b$ są całkowite.

Rozwiązanie:

Zapiszmy liczby a i b w postaci ułamków nieskracalnych o naturalnym liczniku i mianowniku:

$$a=\frac{m}{n}\,, \qquad b=\frac{s}{t}\,.$$

Otrzymujemy wówczas kolejno:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{s/t}=2\,,$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{s}=2^t\,,$$

$$m^s=2^t\cdot n^s\,. \qquad (\heartsuit)$$

Dowód całkowitości liczby **a**, *czyli równości* $\mathbf{n=1}$ *(dowód nie wprost):*

Jeżeli liczba n jest większa od 1, to ma dzielnik pierwszy, oznaczmy go przez p. Wówczas prawa strona równości $(\heartsuit)$ jest podzielna przez p, a zatem lewa strona też jest podzielna przez p. Skoro jednak liczba m^s jest podzielna przez liczbę pierwszą p, to także m jest podzielne przez p, co przeczy założeniu, że liczby m i n są względnie pierwsze.

Dowód całkowitości liczby $\mathbf{1/b}$*:*

Skoro wiemy już, że $n=1$, równanie $(\heartsuit)$ przyjmuje postać

$$m^s=2^t\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Stąd wynika, że m jest potęgą dwójki o wykładniku naturalnym, powiedzmy $m=2^k$, co po podstawieniu do równania $(\diamondsuit)$ daje

$$2^{ks}=2^t\,.$$

Wobec tego $ks=t$, skąd $k=t/s=1/b$ jest liczbą całkowitą.

578. Udowodnić, że liczba rzeczywista $q>1$ spełniająca równanie $q^{q^2}=256$ jest niewymierna.

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że dana w zadaniu liczba jest wymierna i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego m/n o naturalnym liczniku i mianowniku.

Przekształcanie danego w zadaniu równania prowadzi kolejno do:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m^2/n^2}=256\,,$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m^2}=256^{n^2}\,,$$

$$m^{m^2}=256^{n^2}\cdot n^{m^2}\,. \tag{5}$$

Gdyby liczba n była większa od 1, miałaby dzielnik pierwszy p. Ponieważ prawa strona równości (5) byłaby podzielna przez p, także lewa strona byłaby podzielna przez p, skąd wynika, że liczba m byłaby podzielna przez p. Ponieważ jednak z założenia liczby m i n są względnie pierwsze, taka sytuacja nie jest możliwa, co dowodzi, że $n=1$.

Zatem liczba $q=m$ jest całkowita. Pozostaje zauważyć, że

$$2^{2^2}=16<256=2^8<3^9=3^{3^2}\,,$$

skąd

$$2<q<3\,,$$

co stoi w sprzeczności z uzyskanym wnioskiem, że q jest liczbą całkowitą.

Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

579. Podać przykład takiego niepustego zbioru ograniczonego A, że $0<\sup A<1$ oraz $\sup\left\{a^2 :\, a\in A\right\}=\sup A$.

Rozwiązanie:

Przykładem zbioru spełniającego warunki zadania jest zbiór $A=\{-1/2,\,1/4\}$. Wówczas $\sup A=1/4$, a przy tym zbiór $\left\{a^2 :\, a\in A\right\}=\{1/16,\,1/4\}$ również ma kres górny $1/4$.

580. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=\frac{7}{2}\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $c>0$ oraz $0<q<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}cq^{n-1}=\frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=\sum_{n=1}^{\infty}c^3\left(q^3\right)^{n-1}=\frac{c^3}{1-q^3}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases}\dfrac{c}{1-q}=\dfrac{7}{2}\\[2mm] \dfrac{c^3}{1-q^3}=\dfrac{7}{2}\,,\end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

czyli

$$\begin{cases} 2c=7(1-q) \\ 2c^3=7\left(1-q^3\right) . \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$c=\frac{7(1-q)}{2} ,$$

co po podstawieniu do drugiego równania daje kolejno

$$2\frac{7^3(1-q)^3}{2^3}=7\left(1-q^3\right)$$

$$\frac{7^2(1-q)^3}{4}=1-q^3$$

$$7^2(1-q)^3=4(1-q)\left(1+q+q^2\right)$$

$$7^2(1-q)^2=4\left(1+q+q^2\right)$$

$$49q^2-98q+49=4q^2+4q+4$$

$$45q^2-102q+45=0 \qquad (\heartsuit)$$

$$15q^2-34q+15=0 .$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma rozwiązania

$$q=\frac{34\pm\sqrt{34^2-4\cdot15\cdot15}}{30}=\frac{17\pm\sqrt{17^2-15^2}}{15}=\frac{17\pm\sqrt{(17-15)(17+15)}}{15}=$$

$$=\frac{17\pm\sqrt{2\cdot32}}{15}=\frac{17\pm\sqrt{64}}{15}=\frac{17\pm8}{15} ,$$

co wobec warunku $q<1$ wymaga przyjęcia "$\pm$"="$-$". Ostatecznie otrzymujemy

$$q=\frac{17-8}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5} ,$$

skąd

$$c=\frac{7(1-q)}{2}=\frac{7}{5} .$$

Otrzymane rozwiązanie $q=3/5$, $c=7/5$ prowadzi do

$$a_n=cq^{n-1}=\frac{7\cdot3^{n-1}}{5^n} .$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot3^{n-1}}{5^n} .$$

581. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+10^3}$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej C istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, że

$$|f(x)-f(y)|>C\cdot|x-y| .$$

Rozwiązanie:
Przyjmijmy $x=-10$ oraz $y=-10-\varepsilon$, gdzie liczba rzeczywista dodatnia ε będzie sprecyzowana później. Wówczas $|x-y|=\varepsilon$, a ponadto

$$|f(x)-f(y)|=\sqrt[3]{300\varepsilon+30\varepsilon^2+\varepsilon^3}>\sqrt[3]{300\varepsilon}>\sqrt[3]{289\varepsilon}=\sqrt[3]{289}\cdot\sqrt[3]{\varepsilon}=\frac{\sqrt[3]{289}}{\varepsilon^{2/3}}\cdot\varepsilon=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{289}}{\varepsilon^{2/3}}\cdot|x-y|=C\cdot|x-y|\ ,$$

o ile założymy, że

$$C=\frac{\sqrt[3]{289}}{\varepsilon^{2/3}}\ ,$$

czyli kolejno

$$\varepsilon^{2/3}=\frac{\sqrt[3]{289}}{C}\ ,$$
$$\varepsilon=\left(\frac{\sqrt[3]{289}}{C}\right)^{3/2}\ ,$$
$$\varepsilon=\frac{17}{C^{3/2}}\ .$$

582. Interesują nas funkcje $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(x)=(1+x)^{1/x}\quad \text{dla}\quad x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}\ . \qquad (*)$$

a) Udowodnić, że istnieje funkcja ciągła f spełniająca warunek $(*)$ i obliczyć $f(0)$ dla tej funkcji f.

Rozwiązanie:
Podstawiając w granicy

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$$

$t=1/x$, czyli $x=1/t$, otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e\ .$$

Ponadto

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\right)=e\cdot 1=e\ .$$

Mamy więc

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\ ,$$

co po podstawieniu $t=1/x$, czyli $x=1/t$, daje

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x}=e\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\,,$$

co po przyjęciu $f(0)=e$ prowadzi do funkcji ciągłej f.

b) Dla funkcji ciągłej f spełniającej warunek $(*)$ obliczyć pochodną $f'(0)$ albo wykazać, że f jest nieróżniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że dla $x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}$ mamy

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(1+x)^{1/x}=\frac{d}{dx}e^{(1/x)\cdot\ln(1+x)}=e^{(1/x)\cdot\ln(1+x)}\cdot\frac{d}{dx}((1/x)\cdot\ln(1+x))=$$
$$=(1+x)^{1/x}\cdot\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right).$$

Zastosowanie reguły de l'Hospitala do definicji pochodnej funkcji f w zerze daje

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\overset{\text{d'H}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(h)-0}{1}=\lim_{h\to 0}f'(h)=\lim_{x\to 0}f'(x)\,,$$

ale można też od razu powołać się na ogólną równość $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ prawdziwą, gdy f jest różniczkowalna wokół zera i ciągła w zerze.

Z pomocą reguły de l'Hospitala wyliczamy

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{1/x}\cdot\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right)\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right)=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x^2\cdot(x+1)}\overset{\text{d'H}}{=}$$
$$\overset{\text{d'H}}{=}e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-(1+x)/(1+x)}{3x^2+2x}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x}\overset{\text{d'H}}{=}e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-1/(1+x)}{6x+2}=-\frac{e}{2}\,.$$

---

583. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+1}{n}\leqslant\frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\binom{4}{1}=4$$

oraz

$$P=\frac{3^0}{2^{-2}}=4\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $4\leqslant 4$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\binom{3n+1}{n}\leqslant\frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\binom{3n+4}{n+1}\leqslant\frac{3^{3n}}{2^{2n-2}}\,. \tag{$\diamondsuit$}$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności ($\clubsuit$) można zapisać jako

$$\binom{3n+1}{n}=\frac{(3n+1)!}{n!\cdot(2n+1)!}\,.$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L=\binom{3n+4}{n+1}=\frac{(3n+4)!}{(n+1)!\cdot(2n+3)!}=\frac{(3n+1)!}{n!\cdot(2n+1)!}\cdot\frac{(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot(3n+4)}{(n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\cdot\frac{(3n+2)\cdot 3\cdot(3n+4)}{(2n+2)\cdot(2n+3)}\leqslant\frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\cdot\frac{27}{4}=\frac{3^{3n}}{2^{2n-2}}=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{(3n+2)\cdot 3\cdot(3n+4)}{(2n+2)\cdot(2n+3)}\leqslant\frac{27}{4}\,. \tag{$\heartsuit$}$$

Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna nierówności

$$\frac{\left(n+\frac{2}{3}\right)}{(n+1)}\cdot\frac{\left(n+\frac{4}{3}\right)}{\left(n+\frac{3}{2}\right)}\leqslant 1\,,$$

w której po lewej stronie występuje iloczyn dwóch ułamków mniejszych od 1 (licznik mniejszy od mianownika, oba dodatnie). Tak więc jest to nierówność prawdziwa.

Kto nie dostrzeże tego rozumowania, będzie pracowicie przekształcał nierówność ($\heartsuit$) do postaci równoważnych:

$$\frac{(3n+2)\cdot(3n+4)}{(n+1)\cdot(2n+3)}\leqslant\frac{9}{2}\,,$$
$$2\cdot(3n+2)\cdot(3n+4)\leqslant 9\cdot(n+1)\cdot(2n+3)\,,$$
$$18n^2+36n+16\leqslant 18n^2+45n+27\,,$$
$$0\leqslant 11n+9$$

i w tym momencie wywnioskuje, że nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

584. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy
$$L=\binom{2}{1}=2$$
oraz
$$P=\frac{2^1}{\sqrt{1}}=2\,.$$
Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $2\geqslant 2$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że
$$\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}\,. \tag{6}$$
Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność
$$\binom{2n+2}{n+1} \geqslant \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}\,. \tag{7}$$

Zauważmy najpierw, że lewą stronę nierówności (6) można zapisać jako
$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\,.$$
Przekształcając lewą stronę nierówności (7) i korzystając z założenia indukcyjnego (6) otrzymujemy
$$L=\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)}=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}=P\,,$$
o ile udowodnimy, że
$$\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\geqslant\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n+1}}\,. \tag{8}$$
Nierówność (8) jest równoważna kolejnym nierównościom
$$\frac{2n+1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}\geqslant 2\,,$$
$$2n+1\geqslant 2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\,,$$
$$(2n+1)^2\geqslant 4\cdot n\cdot(n+1)\,,$$
$$4n^2+4n+1\geqslant 4n^2+4n\,,$$

$$1 \geqslant 0\,,$$

a zatem nierówność (8) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności (6) wynika nierówność (7).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

585. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!} \leqslant 4^{n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ mamy

$$L=\frac{2!}{1!\cdot 2!}=1$$

oraz

$$P=4^0=1\,.$$

Zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $1\leqslant 1$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!} \leqslant 4^{n-1}\,. \qquad (\clubsuit)$$

Wykażemy, że wówczas zachodzi nierówność

$$\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+2)!} \leqslant 4^{n}\,. \qquad (\diamondsuit)$$

Przekształcając lewą stronę nierówności ($\diamondsuit$) i korzystając z założenia indukcyjnego ($\clubsuit$) otrzymujemy

$$L=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+2)!}=\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)}\leqslant$$
$$\leqslant 4^{n-1}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+2}\leqslant 4^{n-1}\cdot 4=4^n=P\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2\cdot(2n+1)}{n+2}\leqslant 4\,. \qquad (\heartsuit)$$

Nierówność ($\heartsuit$) jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2n+1\leqslant 2\cdot(n+2)\,,$$
$$2n+1\leqslant 2n+4\,,$$

$$1 \leqslant 4\,,$$

a zatem nierówność ($\heartsuit$) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Tym samym udowodniliśmy, że dla każdej liczby naturalnej n z nierówności ($\clubsuit$) wynika nierówność ($\diamondsuit$).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej n.

Sposób II:

Zauważmy, że lewa strona dowodzonej nierówności może być zapisana w postaci $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.
Ponieważ liczba $\binom{2n}{n}$ występuje w $2n$-tym wierszu trójkąta Pascala, jest ona mniejsza od sumy wszystkich liczb występujących w tym wierszu, czyli od 2^{2n}.

W konsekwencji dla $n \geqslant 3$ dowodzona nierówność wynika z następującego ciągu nierówności:

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} < \frac{4^n}{n+1} \leqslant \frac{4^n}{3+1} = 4^{n-1}\,.$$

Natomiast dla $n=1$ i $n=2$ sprawdzamy bezpośrednio, że dana w zadaniu nierówność przyjmuje odpowiednio postać $1 \leqslant 1$ i $2 \leqslant 4$.

586. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+5)\cdot\binom{2n}{n} > 9\cdot 4^{n-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Zamierzamy przeprowadzić dowód indukcyjny.

1° (w tej chwili wydaje nam się, że jest to pierwszy krok indukcyjny) Dla $n=1$ mamy

$$L = (n+5)\cdot\binom{2n}{n} = 6\cdot\binom{2}{1} = 6\cdot 2 = 12$$

oraz

$$P = 9\cdot 4^{n-1} = 9\cdot 4^0 = 9\,,$$

a zatem dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać $12 > 9$, jest więc prawdziwa.

2° Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, że

$$(n+5)\cdot\binom{2n}{n} > 9\cdot 4^{n-1}\,.$$

Chcemy wykazać, że

$$(n+6)\cdot\binom{2n+2}{n+1} > 9\cdot 4^n\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności otrzymujemy

$$(n+6)\cdot\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(n+6)(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\frac{(n+6)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)}=$$

$$=(n+5)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{(n+6)(2n+1)(2n+2)}{(n+5)(n+1)^2}=(n+5)\cdot\binom{2n}{n}\cdot\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}>$$

$$>9\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}\geqslant 9\cdot 4^{n-1}\cdot 4=9\cdot 4^n\,,$$

o ile udowodnimy, że

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)}\geqslant 4\,.$$

Powyższa nierówność jest równoważna kolejnym nierównościom

$$2(n+6)(2n+1)\geqslant 4(n+5)(n+1)\,,$$

$$(n+6)(2n+1)\geqslant 2(n+5)(n+1)\,,$$

$$2n^2+n+12n+6\geqslant 2\left(n^2+n+5n+5\right)\,,$$

$$2n^2+13n+6\geqslant 2n^2+12n+10\,,$$

$$n\geqslant 4\,.$$

Drugi krok indukcyjny został więc przeprowadzony tylko dla $n\geqslant 4$.

Dla kompletności dowodu należy sprawdzić daną w treści zadania nierówność dla $n=2$ i $n=3$ oraz dla $n=4$. Sprawdzenie dla $n=4$ okazuje się przejmować rolę pierwszego kroku indukcyjnego, a sprawdzenie dla $n=2$ i $n=3$ weryfikuje dowodzoną nierówność w przypadkach, które dotąd nie zostały sprawdzone, ani też nie wynikają z dowodu indukcyjnego.

Dla $n=2$ otrzymujemy

$$L=7\cdot\binom{4}{2}=7\cdot 6=42 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^1=36\,,$$

skąd $L>P$.

Dla $n=3$ otrzymujemy

$$L=8\cdot\binom{6}{3}=8\cdot 20=160 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^2=144\,,$$

skąd $L>P$.

1° (to okazuje się być pierwszym krokiem indukcyjnym) Dla $n=4$ otrzymujemy

$$L=9\cdot\binom{8}{4}=9\cdot 70 \quad \text{oraz} \quad P=9\cdot 4^3=9\cdot 64\,,$$

skąd $L>P$.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej dana w zadaniu nierówność została udowodniona dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 4$, a ponadto wykonaliśmy bezpośrednie sprawdzenie dla $n=1$, $n=2$ i $n=3$.

Uwagi:

Sprawdzenie dla $n=4$ nie wydaje się wymagać wiele pracy, jednak brak świadomości konieczności wykonania tego sprawdzenia jest bardzo poważnym błędem.

Jeśli zamiast nierówności

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)} \geqslant 4$$

w rozwiązaniu pojawi się ostra nierówność

$$\frac{2(n+6)(2n+1)}{(n+5)(n+1)} > 4\,, \tag{$\spadesuit$}$$

to w konsekwencji drugi krok indukcyjny zostanie przeprowadzony dla $n>4$. Tym samym konieczne będzie także sprawdzenie dowodzonej nierówności dla $n=5$.

587. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \frac{1}{5}\,.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy znaleźć szereg geometryczny o żądanych własnościach.

W tym celu załóżmy, że $a_n=cq^{n-1}$, pamiętając, aby $|q|<1$. Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c^2\left(q^2\right)^{n-1} = \frac{c^2}{1-q^2}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 = \sum_{n=1}^{\infty} c^4\left(q^4\right)^{n-1} = \frac{c^4}{1-q^4}\,,$$

co po uwzględnieniu warunków zadania prowadzi do układu równań

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{c}{1-q} & = & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{c^2}{1-q^2} & = & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{c^4}{1-q^4} & = & \dfrac{1}{5}\,, \end{array}\right. \tag{$\spadesuit$}$$

czyli

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2c & = & 1-q \\ 2c^2 & = & 1-q^2 \\ 5c^4 & = & 1-q^4\,. \end{array}\right.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$c=\frac{1-q}{2}\,,$$

co po podstawieniu do drugiego równania i uwzględnieniu, że $1-q\neq 0$, daje kolejno

$$2\cdot\frac{(1-q)^2}{2^2}=1-q^2\,,$$

$$\frac{(1-q)^2}{2}=(1-q)\cdot(1+q)\,,$$

$$\frac{1-q}{2}=1+q\,,$$

$$1-q=2+2q\,,$$

$$-1=3q\,,$$

$$q=-1/3\,,\qquad c=2/3\,.$$

Para $(c,\,q)=(2/3,\,-1/3)$ jest jedyną parą liczb spełniającą pierwsze dwa równania układu (♠). Należy sprawdzić, że spełnia ona także trzecie równanie tego układu:

$$\frac{c^4}{1-q^4}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^4}=\frac{16/81}{80/81}=\frac{1}{5}\,.$$

Otrzymane rozwiązanie $q=-1/3$, $c=2/3$ prowadzi do

$$a_n=cq^{n-1}=\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{3^n}\,.$$

Odpowiedź: Przykładem szeregu spełniającego warunki zadania jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}}{3^n}\,.$$

Uwaga: Nie istnieje szereg o wyrazach nieujemnych spełniający warunki zadania, gdyż dla dowolnego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach nieujemnych zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^2\,.$$

588. Dobrać odpowiednią liczbę rzeczywistą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C\cdot x^k\leqslant\left(4\cdot\sqrt{16x+9}-3\cdot\sqrt{9x+16}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\leqslant 3C\cdot x^k\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów pozwala przekształcić szacowane wyrażenie w następujący sposób:

$$\left(4\cdot\sqrt{16x+9}-3\cdot\sqrt{9x+16}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)=\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+1)}{4\cdot\sqrt{16x+9}+3\cdot\sqrt{9x+16}}\,.$$

W przypadku, gdy $x\geqslant 1$, wykonujemy następujące szacowania:

$$5x=\frac{175x\cdot\sqrt{x}}{35\cdot\sqrt{x}}=\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+0)}{4\cdot\sqrt{16x+9x}+3\cdot\sqrt{9x+16x}}\leqslant\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+1)}{4\cdot\sqrt{16x+9}+3\cdot\sqrt{9x+16}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x})}{4\cdot\sqrt{16x+0}+3\cdot\sqrt{9x+0}}=\frac{350x\cdot\sqrt{x}}{25\cdot\sqrt{x}}=14x<15x\,.$$

Natomiast w przypadku, gdy $0<x<1$, oszacowania wyglądają następująco:

$$5x=\frac{175x}{35}=\frac{175x\cdot(0+1)}{4\cdot\sqrt{16+9}+3\cdot\sqrt{9+16}}\leqslant\frac{175x\cdot(\sqrt{x}+1)}{4\cdot\sqrt{16x+9}+3\cdot\sqrt{9x+16}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{175x\cdot(1+1)}{4\cdot\sqrt{0+9}+3\cdot\sqrt{0+16}}=\frac{350x}{24}<\frac{360x}{24}=15x\,.$$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$5\cdot x\ \leqslant\ \left(4\cdot\sqrt{16x+9}-3\cdot\sqrt{9x+16}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\ \leqslant\ 15\cdot x\,,$$

można więc przyjąć $k=1$ oraz $C=5$.

589. Wyznaczyć takie liczby rzeczywiste p i A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{px}-p\cdot e^x+1}{x^2} & \text{dla}\quad x\neq 0\\[2ex] A & \text{dla}\quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości parametrów p i A.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{ph}-p\cdot e^h+1}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{ph}-p\cdot e^h+1-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-p}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $p=2$. Wówczas możemy zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2\cdot e^h+1-Ah^2}{h^3}\overset{\text{d'H}}{=}\frac{2e^{2h}-2\cdot e^h-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4e^{2h}-2\cdot e^h-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{8e^{2h}-2\cdot e^h}{6}=\frac{6}{6}=1\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $p=2$, $A=1$ i wówczas $f'(0)=1$.

Sposób II:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g, że dla każdego x zachodzi równość:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+x^5\cdot g(x)\,.$$

Wówczas dla $x\neq 0$ mamy:

$$f(x)=\frac{e^{px}-p\cdot e^x+1}{x^2}=$$

$$=\frac{1+px+\frac{p^2x^2}{2}+\frac{p^3x^3}{6}+\frac{p^4x^4}{24}+p^5x^5\cdot g(px)-p-px-\frac{px^2}{2}-\frac{px^3}{6}-\frac{px^4}{24}-px^5\cdot g(x)+1}{x^2}=$$

$$=\frac{2-p}{x^2}+\frac{p^2-p}{2}+\frac{(p^3-p)\cdot x}{6}+\frac{(p^4-p)\cdot x^2}{24}+p^5x^3\cdot g(px)-px^3\cdot g(x)\,.$$

Wobec tego $p=2$, bo w przeciwnym razie funkcja f ma osobliwość w zerze. Wówczas

$$f(x)=1+x+\frac{7\cdot x^2}{12}+32x^3\cdot g(2x)-2x^3\cdot g(x)\,.$$

Stąd $A=1$ i wówczas $f'(0)=1$. Prawie za darmo dostajemy także $f''(0)=7/6$.

W każdym z kolejnych zadań zadań podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

590. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+n}{1+3+5+7+\ldots+(2k+1)+\ldots+(2n+1)}=\mathbf{1/2}$

591. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+(2n+1)}{1+3+5+7+\ldots+(2k+1)+\ldots+(2n+1)}=\mathbf{2}$

592. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+2^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n}=\mathbf{3/8}$

593. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+4^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n}=\mathbf{3/2}$

594. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+8^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+8^n}=\mathbf{7/4}$

595. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+2^n\right)^2}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n}=\mathbf{3}$

596. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}=\mathbf{3/2}$

597. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=\mathbf{7/6}$

598. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}=\mathbf{7/4}$

599. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=\mathbf{9/8}$

600. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n}=\mathbf{21/16}$