Zadania 564-582 do omówienia na wykładzie w formie konwersatorium w środy/czwartki 26/27.01.2022 oraz 2/3.02.2022.

Zadania 583-600 do omówienia na ćwiczeniach w poniedziałki[1] 31.01.2022 i 7.02.2022.

564. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{3}\cdot n\cdot\sqrt{n+1} < \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n} < \frac{2}{3}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1)\,.$$

565. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^3} < \frac{2}{5}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\sqrt{n+1}\,.$$

566. Dobrać odpowiednie liczby wymierne dodatnie C oraz $D\leqslant 11C$ i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$C\leqslant\frac{x^{2014}+2}{8x^{2014}+3}\leqslant D\,.$$

567. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 3$ zachodzi nierówność

$$n^{n+1}>(n+1)^n\,.$$

568. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n+3^{2n}}{9^n}+\frac{5^{n+1}+3^{2n-1}}{9^{n-1}\cdot 25}+\frac{5^{n+2}+3^{2n-2}}{9^{n-2}\cdot 25^2}+\ldots+\frac{5^{n+k}+3^{2n-k}}{9^{n-k}\cdot 25^k}+\ldots+\frac{5^{2n}+3^n}{25^n}\right).$$

569. Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{\qquad}{(n+6)^2}\right)\,.$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

570. Udowodnić, że równanie

$$10^x=x\cdot 7^x$$

ma co najmniej dwa rozwiązania rzeczywiste.

[1] Ćwiczenia w poniedziałek 7.02.2022 mogą mieć w części lub w całości formę konsultacji, podczas których omawiane będą wskazane przez studentów zadania (z całego semestru). To samo dotyczy konwersatorium po omówieniu wszystkich zaplanowanych zadań.

571. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej $x\in(0,\,2)$ spełniającej nierówność
$$x^{2015}\cdot(x-2)^{2016}>1\,.$$

572. Udowodnić, że równanie
$$x^{2019}\cdot(x-2)^{2018}=1$$
ma co najmniej trzy rozwiązania.

573. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność
$$\sin^{2017}(3x)\cdot\sin x>\frac{1}{2}\,.$$

574. Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność
$$\sin^{2019}(3x)\cdot\sin(5x)>\frac{1}{2}\,.$$

575. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 4$ zachodzi nierówność
$$\binom{n+3}{7}<\frac{n^7}{7!}\,.$$

576. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\sum_{i=1}^{n} i^7<\frac{n^4\cdot(n+1)^4}{8}\,.$$

577. Liczby wymierne dodatnie a i b spełniają warunek $a^b=2$. Dowieść, że liczby a i $1/b$ są całkowite.

578. Udowodnić, że liczba rzeczywista $q>1$ spełniająca równanie $q^{q^2}=256$ jest niewymierna.

579. Podać przykład takiego niepustego zbioru ograniczonego A, że $0<\sup A<1$ oraz $\sup\{a^2:\,a\in A\}=\sup A$.

580. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3=\frac{7}{2}\,.$$

581. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+10^3}$. Dowieść, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej C istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, że

$$|f(x)-f(y)|>C\cdot|x-y|\ .$$

582. Interesują nas funkcje $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ spełniające warunek

$$f(x)=(1+x)^{1/x} \quad \text{dla} \quad x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\}\,. \qquad (*)$$

a) Udowodnić, że istnieje funkcja ciągła f spełniająca warunek $(*)$ i obliczyć $f(0)$ dla tej funkcji f.

b) Dla funkcji ciągłej f spełniającej warunek $(*)$ obliczyć pochodną $f'(0)$ albo wykazać, że f jest nieróżniczkowalna w zerze.

---

583. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{3n+1}{n}\leqslant\frac{3^{3n-3}}{2^{2n-4}}\,.$$

584. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n}\geqslant\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}\,.$$

585. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n)!}{n!\cdot(n+1)!}\leqslant 4^{n-1}\,.$$

586. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n+5)\cdot\binom{2n}{n}>9\cdot 4^{n-1}\,.$$

587. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^4=\frac{1}{5}\,.$$

588. Dobrać odpowiednią liczbę rzeczywistą k oraz liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C\cdot x^k\leqslant\left(4\cdot\sqrt{16x+9}-3\cdot\sqrt{9x+16}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\leqslant 3C\cdot x^k\,.$$

589. Wyznaczyć takie liczby rzeczywiste p i A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{px}-p\cdot e^{x}+1}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tych wartości parametrów p i A.

W każdym z kolejnych zadań zadań podaj granicę (lub granicę niewłaściwą) ciągu. Liczby wymierne podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

590. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+n}{1+3+5+7+\ldots+(2k+1)+\ldots+(2n+1)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

591. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+(2n+1)}{1+3+5+7+\ldots+(2k+1)+\ldots+(2n+1)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

592. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+4+\ldots+k+\ldots+2^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

593. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+4^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

594. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+8^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+8^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

595. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+2^n\right)^2}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+4^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

596. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

597. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

598. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+4+8+\ldots+2^k+\ldots+64^n}{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

599. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+8+64+512+\ldots+8^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

600. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+4+16+64+\ldots+4^k+\ldots+64^n}{1+64+4096+\ldots+64^k+\ldots+64^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$