553. W zadaniach **553.1–553.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x)=x^k\cdot\ln(1+x)\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

553.1. $f_1''(0)=\mathbf{2}$

553.2. $f_1'''(0)=\mathbf{-3}$

553.3. $f_1^{(4)}(0)=\mathbf{8}$

553.4. $f_1^{(5)}(0)=\mathbf{-30}$

553.5. $f_2'''(0)=\mathbf{6}$

553.6. $f_2^{(4)}(0)=\mathbf{-12}$

553.7. $f_2^{(5)}(0)=\mathbf{40}$

553.8. $f_3^{(4)}(0)=\mathbf{24}$

553.9. $f_3^{(5)}(0)=\mathbf{-60}$

553.10. $f_4^{(5)}(0)=\mathbf{120}$

554. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^2\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0)=\mathbf{110}$

b) $f^{(10)}(0)=\mathbf{90}$

c) $f^{(9)}(0)=\mathbf{72}$

d) $f^{(8)}(0)=\mathbf{56}$

555. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^3\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0)=\mathbf{24}$

b) $f^{(6)}(0)=\mathbf{120}$

c) $f^{(10)}(0)=\mathbf{720}$

d) $f^{(11)}(0)=\mathbf{990}$

556. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^{100}\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0)=\mathbf{100!}$

b) $f^{(101)}(0)=\mathbf{101!}$

c) $f^{(102)}(0)=\mathbf{102!/2}$

d) $f^{(103)}(0)=\mathbf{103!/6}$

557. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\sin^2 x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0)=\mathbf{-8}$ **b)** $f^{(5)}(0)=\mathbf{0}$

c) $f^{(6)}(0)=\mathbf{32}$ **d)** $f^{(8)}(0)=\mathbf{-128}$

558. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=\frac{x\cdot\ln(1+x)}{12!}\,.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0)=\mathbf{-1/120}$ **b)** $f^{(12)}(0)=\mathbf{1/11}$

c) $f^{(13)}(0)=\mathbf{-13/12}$ **d)** $f^{(14)}(0)=\mathbf{14}$

559. Niech $f(x)=e^{x^5}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g, że

$$e^x=\sum_{k=0}^{404}\frac{x^k}{k!}+x^{405}\cdot g(x)\,.$$

Wobec tego

$$f(x)=e^{x^5}=\sum_{k=0}^{404}\frac{x^{5k}}{k!}+x^{2025}\cdot g\left(x^5\right)$$

i w konsekwencji

$$f^{(2020)}(x)=\frac{2020!}{404!}+\frac{d^{2020}}{dx^{2020}}\left(x^{2025}\cdot g\left(x^5\right)\right)\,.$$

Zatem

$$f^{(2020)}(0)=\frac{2020!}{404!}\,.$$

Analogicznie

$$f^{(2021)}(x)=\frac{d^{2021}}{dx^{2021}}\left(x^{2025}\cdot g\left(x^5\right)\right)\,,$$

skąd

$$f^{(2021)}(0)=0\,.$$

560. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\ln(1+x)+e^{-x}+ax^3$$

spełniała warunek

$$f'''(0)=0\,.$$

Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takich funkcji gładkich g i h, że

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^5\cdot g(x)$$

oraz

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+x^5\cdot h(x)\,.$$

Zatem

$$\ln(1+x)+e^{-x}=1+\frac{x^3}{6}-\frac{5\cdot x^4}{24}+x^5\cdot(g(x)+h(x))\,.$$

Stąd wynika, że warunki zadania spełnia $a=-1/6$ i wówczas

$$f(x)=1-\frac{5\cdot x^4}{24}+x^5\cdot(g(x)+h(x))=1+\left(\frac{-5}{24}+x\cdot(g(x)+h(x))\right)\cdot x^4$$

ma w zerze lokalne maksimum, gdyż

$$\frac{-5}{24}+x\cdot(g(x)+h(x))<0$$

dla x bliskich 0.

561. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sin\left(x^3\right)+a\cdot\sin\left(x^5\right)$$

spełniała warunek

$$f^{(15)}(0)=0\,.$$

Rozwiązanie:

Ze wzoru Taylora wynika istnienie takiej funkcji gładkiej g, że

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^7\cdot g(x)\,.$$

Zatem

$$f(x)=\sin\left(x^3\right)+a\cdot\sin\left(x^5\right)=x^3-\frac{x^9}{6}+\frac{x^{15}}{120}+x^{21}\cdot g\left(x^3\right)+a\cdot x^5-\frac{a\cdot x^{15}}{6}+\frac{a\cdot x^{25}}{120}+a\cdot x^{35}\cdot g\left(x^5\right)=$$

$$=x^3+a\cdot x^5-\frac{x^9}{6}+\frac{(1-20\cdot a)\cdot x^{15}}{120}+x^{21}\cdot\left(g\left(x^3\right)+\frac{a\cdot x^4}{120}+a\cdot x^{14}\cdot g\left(x^5\right)\right)\,.$$

Warunek $f^{(15)}(0)=0$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik przy x^{15} jest równy 0, czyli dla $a=1/20$.