Zadania do omówienia na ćwiczeniach
we wtorek[1] 1.02.2022.

Zadania należy spróbować[2] rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

553. W zadaniach **553.1–553.10** funkcja f_k jest określona wzorem

$$f_k(x)=x^k\cdot\ln(1+x)\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartość pochodnej wskazanego rzędu w zerze.

553.1. $f_1''(0)=$ ....

553.2. $f_1'''(0)=$ ....

553.3. $f_1^{(4)}(0)=$ ....

553.4. $f_1^{(5)}(0)=$ ....

553.5. $f_2'''(0)=$ ....

553.6. $f_2^{(4)}(0)=$ ....

553.7. $f_2^{(5)}(0)=$ ....

553.8. $f_3^{(4)}(0)=$ ....

553.9. $f_3^{(5)}(0)=$ ....

553.10. $f_4^{(5)}(0)=$ ....

554. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^2\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(11)}(0)=\ldots.$ **b)** $f^{(10)}(0)=\ldots.$ **c)** $f^{(9)}(0)=\ldots.$ **d)** $f^{(8)}(0)=\ldots.$

555. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^3\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(4)}(0)=\ldots.$ **b)** $f^{(6)}(0)=\ldots.$ **c)** $f^{(10)}(0)=\ldots.$ **d)** $f^{(11)}(0)=\ldots.$

556. Niech f będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x)=x^{100}\cdot e^x\,.$$

Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.

a) $f^{(100)}(0)=\ldots$ **b)** $f^{(101)}(0)=\ldots$ **c)** $f^{(102)}(0)=\ldots$ **d)** $f^{(103)}(0)=\ldots$

---

[1] W poniedziałek 31.01.2022 omawiana będzie lista powtórzeniowa, gdyż w czasie ćwiczeń niektórzy studenci będą pisać dodatkowe kolokwium poprawkowe.

[2] Przypominam wzór Taylora w zerze z użyteczną dla tych zadań postacią reszty:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+x^{n+1}\cdot g(x)\,,$$

gdzie g jest funkcją gładką, czyli C^∞, czyli mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów w otoczeniu zera.

557. Niech f będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=\sin^2 x\,.$$
Podać wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.
a) $f^{(4)}(0)=\ldots.$ **b)** $f^{(5)}(0)=\ldots.$ **c)** $f^{(6)}(0)=\ldots.$ **d)** $f^{(8)}(0)=\ldots.$

558. Niech f będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=\frac{x\cdot\ln(1+x)}{12!}\,.$$
Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartość pochodnej odpowiedniego rzędu funkcji f w zerze.
a) $f^{(11)}(0)=\ldots$ **b)** $f^{(12)}(0)=\ldots$ **c)** $f^{(13)}(0)=\ldots$ **d)** $f^{(14)}(0)=\ldots$

559. Niech $f(x)=e^{x^5}$. Obliczyć $f^{(2020)}(0)$ i $f^{(2021)}(0)$.

560. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\ln(1+x)+e^{-x}+ax^3$$
spełniała warunek
$$f'''(0)=0\,.$$
Czy funkcja f ma w zerze (lokalne) ekstremum? Jeśli tak, to jakie?

561. Dobrać taką liczbę rzeczywistą a, aby funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\sin\left(x^3\right)+a\cdot\sin\left(x^5\right)$$
spełniała warunek
$$f^{(15)}(0)=0\,.$$

562. Przy okazji reguły de l'Hospitala rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$
jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.

563. Przy okazji reguły de l'Hospitala rozwiązywaliśmy takie oto zadanko:

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$
jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązać powyższe zadanie korzystając ze wzoru Taylora i przy okazji obliczyć $f''(0)$, $f'''(0)$ oraz $f^{(4)}(0)$.