W każdym z kolejnych 10 zadań zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie.

502. $f_1(x)=\sqrt{x}$ $\quad f_1'(25)=\mathbf{1/10}$, $\quad f_1''(25)=--\mathbf{1/500}$, $\quad f_1'''(25)=\mathbf{3/25000}$

503. $f_2(x)=x\cdot\sqrt{x}$ $\quad f_2'(1/4)=\mathbf{3/4}$, $\quad f_2''(1/4)=\mathbf{3/2}$, $\quad f_2'''(1/4)=--\mathbf{3}$

504. $f_3(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$ $\quad f_3'(4)=\mathbf{20}$, $\quad f_3''(4)=\mathbf{15/2}$, $\quad f_3'''(4)=\mathbf{15/16}$

505. $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad f_4'(1)=\mathbf{1/3}$, $\quad f_4''(1)=--\mathbf{2/9}$, $\quad f_4'''(1)=\mathbf{10/27}$

506. $f_5(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$ $\quad f_5'(1/27)=\mathbf{4/9}$, $\quad f_5''(1/27)=\mathbf{4}$, $\quad f_5'''(1/27)=--\mathbf{72}$

507. $f_6(x)=\ln x$ $\quad f_6'(2)=\mathbf{1/2}$, $\quad f_6''(2)=--\mathbf{1/4}$, $\quad f_6'''(2)=\mathbf{1/4}$

508. $f_7(x)=x\cdot\ln x$ $\quad f_7'(1)=\mathbf{1}$, $\quad f_7''(1)=\mathbf{1}$, $\quad f_7'''(1)=--\mathbf{1}$

509. $f_8(x)=\operatorname{arctg} x$ $\quad f_8'(1)=\mathbf{1/2}$, $\quad f_8''(1)=--\mathbf{1/2}$, $\quad f_8'''(1)=\mathbf{1/2}$

510. $f_9(x)=\operatorname{arctg} x$ $\quad f_9'(2)=\mathbf{1/5}$, $\quad f_9''(2)=--\mathbf{4/25}$, $\quad f_9'''(2)=\mathbf{22/125}$

511. $f_{10}(x)=\operatorname{arctg} x$ $\quad f_{10}'(3)=\mathbf{1/10}$, $\quad f_{10}''(3)=--\mathbf{3/50}$, $\quad f_{10}'''(3)=\mathbf{13/250}$

512. Wyznaczyć liczbę naturalną k oraz liczby wymierne a i b, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej funkcji trzykrotnie różniczkowalnej $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o dodatniej pochodnej pierwszego rzędu, pochodna trzeciego rzędu funkcji f odwrotnej do g wyraża się wzorem:

$$f'''(g(x))=\frac{a\cdot(g''(x))^2+b\cdot g'(x)\cdot g'''(x)}{(g'(x))^k}\,.$$

Rozwiązanie:

Trzykrotne różniczkowanie stronami równości

$$f(g(x))=x$$

prowadzi kolejno do

$$f'(g(x))\cdot g'(x)=1\,,$$

$$f''(g(x))\cdot(g'(x))^2+f'(g(x))\cdot g''(x)=0\,,$$

$$f'''(g(x))\cdot(g'(x))^3+f''(g(x))\cdot 2\cdot g'(x)\cdot g''(x)+f''(g(x))\cdot g''(x)\cdot g'(x)+f'(g(x))\cdot g'''(x)=0\,,$$

$$f'''(g(x))\cdot(g'(x))^3+3\cdot f''(g(x))\cdot g'(x)\cdot g''(x)+f'(g(x))\cdot g'''(x)=0\,.$$

Wobec tego otrzymujemy następujące wzory na pochodne funkcji f:

$$f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)},$$

$$f''(g(x)) = -\frac{f'(g(x)) \cdot g''(x)}{(g'(x))^2} = -\frac{g''(x)}{(g'(x))^3},$$

$$f'''(g(x)) = -\frac{3 \cdot f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g''(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x)}{(g'(x))^3} =$$

$$= -\frac{3 \cdot \frac{-g''(x)}{(g'(x))^3} \cdot g'(x) \cdot g''(x) + \frac{1}{g'(x)} \cdot g'''(x)}{(g'(x))^3} = \frac{3 \cdot (g''(x))^2 - g'(x) \cdot g'''(x)}{(g'(x))^5}.$$

W konsekwencji szukane liczby to $k=5$, $a=3$ i $b=-1$.

W każdym z kolejnych 4 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

513. $f_1(x) = \ln x$

$f_1^{(4)}(1) = \mathbf{-6}$ $f_1^{(4)}(2) = \mathbf{-3/8}$ $f_1^{(4)}(3) = \mathbf{-2/27}$

514. $f_2(x) = \sin x \cdot \cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \mathbf{4}$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \mathbf{8}$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$

515. $f_3(x) = (2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0) = \mathbf{-15}$ $f_3^{(4)}(4) = \mathbf{-5/9}$ $f_3^{(4)}(12) = \mathbf{-3/25}$

516. $f_4(x) = \sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0) = \mathbf{9/16}$ $f_4^{(4)}(3) = \mathbf{9/2^9 = 9/512}$ $f_4^{(4)}(8) = \mathbf{1/(16 \cdot 27) = 1/432}$

517. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2019 funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = e^x \cdot \sin x.$$

Otrzymany wzór powienien mieć prostą postać, bez znaku "$\sum$", z co najwyżej dwoma znakami "+" i co najwyżej dwoma znakami "$-$".

Rozwiązanie:

Obliczając kolejne pochodne funkcji f otrzymujemy

$$f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x,$$

$$f''(x)=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x+e^x\cdot\cos x-e^x\cdot\sin x=2\cdot e^x\cdot\cos x\,,$$
$$f'''(x)=2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x\,,$$
$$f^{(4)}(x)=2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x-2\cdot e^x\cdot\sin x-2\cdot e^x\cdot\cos x=-4\cdot e^x\cdot\sin x=-4\cdot f(x)\,,$$

skąd wynika, że czterokrotne zróżniczkowanie funkcji f jest równoważne z pomnożeniem jej przez -4.

Wobec tego

$$f^{(2019)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}f^{(2016)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}f^{(4\cdot 504)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}(-4)^{504}f(x)=2^{1008}\cdot f'''(x)=$$
$$=2^{1008}\cdot(2\cdot e^x\cdot\cos x-2\cdot e^x\cdot\sin x)=2^{1009}\cdot e^x\cdot(\cos x-\sin x)\ .$$

Wstawić znak "$<$" albo "$>$" i udowodnić powstałą nierówność:

528. $e^x > 1+x$ dla $x>0$

529. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

530. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

531. $\ln(x+1) < x$ dla $x>0$

532. $\ln(x+1) > x-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

533. $\ln(x+1) < x$ dla $-1<x<0$

534. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

535. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x>0$

536. $\ln(x+1) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

537. $\ln(x+1) > \frac{x}{2}$ dla $0<x<2$

538. $\operatorname{arctg} x < x$ dla $x>0$

539. $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi x}{4}$ dla $0<x<1$

540. $\sin x < x$ dla $x>0$

541. $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

542. $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

543. $\cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x>0$

544. $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$

545. $\sin x > \frac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{6}$

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0.

546. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}$, $x_0=0$ **NIE**

547. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$, $x_0=0$ **MIN**

548. $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $x_0=0$ **MIN**

549. $f(x)=2\cos x+\ln\left(1+x^2\right)$, $x_0=0$ **MAX**

550. $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$, $x_0=0$ **NIE**

551. $f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}$, $x_0=1$ **MAX**

552. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f=[a,b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(i) $f'(a^+)>0$ **MIN**

(ii) $f'(a^+)<0$ **MAX**

(iii) $f'(a^+)=0$, $f''(a^+)>0$ **MIN**

(iv) $f'(a^+)=0$, $f''(a^+)<0$ **MAX**

(v) $f'(a^+)=f''(a^+)=0$, $f'''(a^+)>0$ **MIN**

(vi) $f'(a^+)=f''(a^+)=0$, $f'''(a^+)<0$ **MAX**

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(vii) $f'(b^-)>0$ **MAX**

(viii) $f'(b^-)<0$ **MIN**

(ix) $f'(b^-)=0$, $f''(b^-)>0$ **MIN**

(x) $f'(b^-)=0$, $f''(b^-)<0$ **MAX**

(xi) $f'(b^-)=f''(b^-)=0$, $f'''(b^-)>0$ **MAX**

(xii) $f'(b^-)=f''(b^-)=0$, $f'''(b^-)<0$ **MIN**