Zadania do omówienia na ćwiczeniach
we wtorek[1] 18.01.2022, poniedziałek 24.01.2022 i wtorek 25.01.2022.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

W każdym z kolejnych 10 zadań zapisz w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości trzech pochodnych funkcji w podanym punkcie.

502. $f_1(x)=\sqrt{x}$ $f_1'(25)=\ldots\ldots\ldots$, $f_1''(25)=\ldots\ldots\ldots$, $f_1'''(25)=\ldots\ldots\ldots$

503. $f_2(x)=x\cdot\sqrt{x}$ $f_2'(1/4)=\ldots\ldots\ldots$, $f_2''(1/4)=\ldots\ldots\ldots$, $f_2'''(1/4)=\ldots\ldots\ldots$

504. $f_3(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$ $f_3'(4)=\ldots\ldots\ldots$, $f_3''(4)=\ldots\ldots\ldots$, $f_3'''(4)=\ldots\ldots\ldots$

505. $f_4(x)=\sqrt[3]{x}$ $f_4'(1)=\ldots\ldots\ldots$, $f_4''(1)=\ldots\ldots\ldots$, $f_4'''(1)=\ldots\ldots\ldots$

506. $f_5(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$ $f_5'(1/27)=\ldots\ldots$, $f_5''(1/27)=\ldots\ldots$, $f_5'''(1/27)=\ldots\ldots$

507. $f_6(x)=\ln x$ $f_6'(2)=\ldots\ldots\ldots$, $f_6''(2)=\ldots\ldots\ldots$, $f_6'''(2)=\ldots\ldots\ldots$

508. $f_7(x)=x\cdot\ln x$ $f_7'(1)=\ldots\ldots\ldots$, $f_7''(1)=\ldots\ldots\ldots$, $f_7'''(1)=\ldots\ldots\ldots$

509. $f_8(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_8'(1)=\ldots\ldots\ldots$, $f_8''(1)=\ldots\ldots\ldots$, $f_8'''(1)=\ldots\ldots\ldots$

510. $f_9(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_9'(2)=\ldots\ldots\ldots$, $f_9''(2)=\ldots\ldots\ldots$, $f_9'''(2)=\ldots\ldots\ldots$

511. $f_{10}(x)=\operatorname{arctg} x$ $f_{10}'(3)=\ldots\ldots\ldots$, $f_{10}''(3)=\ldots\ldots\ldots$, $f_{10}'''(3)=\ldots\ldots\ldots$

512. Wyznaczyć liczbę naturalną k oraz liczby wymierne a i b, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Dla dowolnej funkcji trzykrotnie różniczkowalnej $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o dodatniej pochodnej pierwszego rzędu, pochodna trzeciego rzędu funkcji f odwrotnej do g wyraża się wzorem:

$$f'''(g(x))=\frac{a\cdot(g''(x))^2+b\cdot g'(x)\cdot g'''(x)}{(g'(x))^k}\,.$$

[1]Według stanu wiedzy na dzień publikowania niniejszej listy zadań, kolokwium nr 6 zostało przesunięte na 17 stycznia i połączone z kolokwium nr 5. W takiej sytuacji kolokwium zajmie całe ćwiczenia 17 stycznia. Gdyby ćwiczenia 17 stycznia odbywały się zdalnie, to niniejsza lista zadań będzie omawiana 17, 18 i 24 stycznia.

W każdym z kolejnych 4 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej czwartego rzędu danej funkcji w trzech podanych punktach. Jeżeli licznik lub mianownik jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

513. $f_1(x)=\ln x$

$f_1^{(4)}(1)=\dots\dots\dots\dots$ $f_1^{(4)}(2)=\dots\dots\dots\dots$ $f_1^{(4)}(3)=\dots\dots\dots\dots$

514. $f_2(x)=\sin x\cdot\cos x$

$f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dots\dots\dots\dots$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dots\dots\dots\dots$ $f_2^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dots\dots\dots\dots$

515. $f_3(x)=(2x+1)^{5/2}$

$f_3^{(4)}(0)=\dots\dots\dots\dots$ $f_3^{(4)}(4)=\dots\dots\dots\dots$ $f_3^{(4)}(12)=\dots\dots\dots\dots$

516. $f_4(x)=\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}$

$f_4^{(4)}(0)=\dots\dots\dots\dots$ $f_4^{(4)}(3)=\dots\dots\dots\dots$ $f_4^{(4)}(8)=\dots\dots\dots\dots$

517. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2019 funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=e^x\cdot\sin x\,.$$

Otrzymany wzór powienien mieć prostą postać, bez znaku "$\sum$", z co najwyżej dwoma znakami "+" i co najwyżej dwoma znakami "−".

518. Wyznaczyć wszystkie takie pary liczb rzeczywistych $(a,\,b)$, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=e^{ax}\cdot\cos(bx)$$

jest równa swojej pochodnej trzeciego rzędu.

519. Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu 2022 funkcji

$$f(x)=e^x\sin\left(x\sqrt{3}\right)\,.$$

Otrzymany wzór powinien mieć prostą postać, nie zawierającą żadnego ze znaków "$\sum$", "+", "−".

Wyprowadzić wzór na pochodną rzędu n funkcji zmiennej x danej wzorem[2]:

520. $\ln(x^{10})$ **521.** $\sqrt{x}$ **522.** xe^x **523.** e^{4x}

524. $\sin 5x$ **525.** $x^2\ln x$ **526.** $\frac{1-x}{1+x}$ **527.** $\frac{1}{x^2+x}$

[2]Wskazówka do jednego z zadań: rozkład na ułamki proste.

Wstawić znak ”<” albo ”>” i udowodnić powstałą nierówność:

528. e^x .... $1+x$ dla $x>0$

529. e^x .... $1+x+\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

530. e^x .... $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

531. $\ln(x+1)$ .... x dla $x>0$

532. $\ln(x+1)$ .... $x-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

533. $\ln(x+1)$ .... x dla $-1<x<0$

534. $\ln(x+1)$ .... $x-\frac{x^2}{2}$ dla $-1<x<0$

535. $\ln(x+1)$ .... $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $x>0$

536. $\ln(x+1)$ .... $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ dla $-1<x<0$

537. $\ln(x+1)$ .... $\frac{x}{2}$ dla $0<x<2$

538. $\operatorname{arctg} x$ .... x dla $x>0$

539. $\operatorname{arctg} x$ .... $\frac{\pi x}{4}$ dla $0<x<1$

540. $\sin x$ .... x dla $x>0$

541. $\cos x$ .... $1-\frac{x^2}{2}$ dla $x>0$

542. $\sin x$ .... $x-\frac{x^3}{6}$ dla $x>0$

543. $\cos x$ .... $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ dla $x>0$

544. $\sin x$ .... $\frac{2x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{2}$

545. $\sin x$ .... $\frac{3x}{\pi}$ dla $0<x<\frac{\pi}{6}$

Zbadać, czy funkcja f określona podanym wzorem ma ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne) w podanym punkcie x_0.

546. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}$, $x_0=0$

547. $f(x)=e^x-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$, $x_0=0$

548. $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $x_0=0$

549. $f(x)=2\cos x+\ln\left(1+x^2\right)$, $x_0=0$

550. $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$, $x_0=0$

551. $f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}$, $x_0=1$

552. Funkcja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ma w przedziale $D_f=[a,b]$ ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie (na końcach przedziału ma pochodne jednostronne równe odpowiednim granicom jednostronnym odpowiednich pochodnych).

a) Czy funkcja f ma w punkcie a ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(i) $f'(a^+)>0$

(ii) $f'(a^+)<0$

(iii) $f'(a^+)=0,\ \ f''(a^+)>0$

(iv) $f'(a^+)=0,\ \ f''(a^+)<0$

(v) $f'(a^+)=f''(a^+)=0,\ \ f'''(a^+)>0$

(vi) $f'(a^+)=f''(a^+)=0,\ \ f'''(a^+)<0$

b) Czy funkcja f ma w punkcie b ekstremum (jeśli tak, to jakie: minimum czy maksimum lokalne), jeżeli:

(vii) $f'(b^-)>0$

(viii) $f'(b^-)<0$

(ix) $f'(b^-)=0,\ \ f''(b^-)>0$

(x) $f'(b^-)=0,\ \ f''(b^-)<0$

(xi) $f'(b^-)=f''(b^-)=0,\ \ f'''(b^-)>0$

(xii) $f'(b^-)=f''(b^-)=0,\ \ f'''(b^-)<0$