

484. Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16) + f(18) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(17) ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}},$$

skąd nierówność $f''(x) > 0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} > 0,$$

$$\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} > \frac{1}{x^2},$$

$$\sqrt{x} > 4,$$

$$x > 16.$$

Zatem f jest ściśle wypukła w przedziale $[16; +\infty)$, skąd

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x) + f(y) > 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y \geq 16$.

W szczególności

$$f(16) + f(18) > 2 \cdot f(17).$$

485. Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(89) + f(91) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(90) ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3 \cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}} &< 0, \\ \frac{2}{9 \cdot x^{5/3}} &< \frac{1}{x^2}, \\ x^{1/3} &< \frac{9}{2}, \\ x &< \frac{9^3}{2^3} = \frac{729}{8} = 91,125. \end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $(0; 91,125)$, skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y < 91,125$.

W szczególności

$$f(89) + f(91) < 2 \cdot f(90).$$

Uwaga: Bezpośrednie obliczenia pokazują, że

$$f(89) + f(91) \approx \mathbf{0,036809335389}$$

oraz

$$2 \cdot f(90) \approx \mathbf{0,036809847546},$$

co wydaje się skutecznie odbierać wszelką nadzieję na rozwiązanie zadania poprzez bezpośrednie szacowanie każdej z podanych liczb z osobna.

486. Niech $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \cdot \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(61) + f(63) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(62) ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{2}{x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x) > 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2} &> 0, \\ \frac{2}{x^2} &> \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}}, \\ 8 &> \sqrt{x}, \end{aligned}$$

$$x < 64,$$

co oznacza, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, 64)$ oraz $f''(x) < 0$ dla $x \in (64, \infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, 64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64, \infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wypukła w interesującym nas przedziale $(0, 64)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x = 61$ oraz $y = 63$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(61) + f(63) > 2 \cdot f(62).$$

Odpowiedź: Liczba $f(61) + f(63)$ jest większa od liczby $2 \cdot f(62)$.

487. Niech $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \cdot \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(65) + f(67) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(66) ?$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną drugiego rzędu danej funkcji:

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{2}{x},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2}.$$

Następnie wyznaczamy przedziały wypukłości/wklęsłości funkcji f poprzez rozwiązanie nierówności $f''(x) > 0$:

$$-\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{2}{x^2} > 0,$$

$$\frac{2}{x^2} > \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}},$$

$$8 > \sqrt{x},$$

$$x < 64,$$

co oznacza, że $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, 64)$ oraz $f''(x) < 0$ dla $x \in (64, \infty)$. W konsekwencji funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, 64)$ i ściśle wklęsła w przedziale $(64, \infty)$.

Ponieważ f jest ściśle wklęsła w interesującym nas przedziale $(64, \infty)$, dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x i y należących do tego przedziału zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

będąca najprostszym wariantem nierówności Jensena. Przyjmując $x = 65$ oraz $y = 67$, a następnie mnożąc powyższą nierówność przez 2 otrzymujemy

$$f(65) + f(67) < 2 \cdot f(66).$$

Odpowiedź: Liczba $f(65) + f(67)$ jest mniejsza od liczby $2 \cdot f(66)$.

488. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$\arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \quad \text{czy} \quad 6 \cdot \arctg 104 ?$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem $f(x) = \arctg x$. Ponieważ jej pochodna $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ jest malejąca na przedziale $(0, +\infty)$, funkcja f jest na tym przedziale ściśle wklęsła.

Zatem na mocy nierówności Jensena dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2 i x_3 oraz dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a_1, a_2 i a_3 spełniających warunek $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ zachodzi

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) > a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_3f(x_3),$$

co dla $x_1 = 100, x_2 = 103, x_3 = 106, a_1 = 1/6, a_2 = 1/3, a_3 = 1/2$ prowadzi do nierówności

$$f(104) > \frac{f(100)}{6} + \frac{f(103)}{3} + \frac{f(106)}{2},$$

gdyż wówczas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \frac{100}{6} + \frac{103}{3} + \frac{106}{2} = \frac{100 + 2 \cdot 103 + 3 \cdot 106}{6} = \frac{624}{6} = 104.$$

Mnożąc udowodnioną nierówność stronami przez 6 i podstawiając $f(x) = \arctg x$ otrzymujemy

$$6 \cdot \arctg 104 > \arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106.$$

Uwaga:

Bezpośrednie wyliczenia pokazują, że

$$\arctg 100 + 2 \cdot \arctg 103 + 3 \cdot \arctg 106 \approx \mathbf{9,367060}$$

oraz

$$6 \cdot \arctg 104 \approx \mathbf{9,367087}.$$

Różnica między porównywanymi liczbami jest więc zbyt mała, aby można sobie wyobrazić ich porównanie bez użycia komputera przez oszacowanie każdej z nich z osobna.

489. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad \text{czy} \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4.$$

Rozwiązanie:

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = \arctg x - \ln x$. Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-2x^3 + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2} = \frac{x^3 \cdot (x - 2) + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2},$$

co na pewno jest dodatnie dla $x > 2$. Wobec tego funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(2, +\infty)$. Na mocy nierówności Jensena otrzymujemy więc

$$f(4) < \frac{f(3) + f(5)}{2},$$

co jest równoważne kolejnym nierównościami:

$$\begin{aligned} 2f(4) &< f(3) + f(5), \\ 2 \arctg 4 - 2 \ln 4 &< \arctg 3 - \ln 3 + \arctg 5 - \ln 5, \\ 2 \arctg 4 + \ln 3 + \ln 5 &< \arctg 3 + \arctg 5 + 2 \ln 4. \end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$\arctg 3 + \arctg 5 + 2 \cdot \ln 4 \quad > \quad \ln 3 + \ln 5 + 2 \cdot \arctg 4.$$

490. Niech funkcja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(6) + f(8) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(7) ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f w przedziale $(0, +\infty)$ otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3 \cdot x^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}},$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{4/3}} - \frac{2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}}}{9 \cdot x^{5/3}} &< 0, \\ x^{1/3} &< 2, \\ x &< 8. \end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0; 8]$, skąd

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x, y \leq 8$.

W szczególności

$$f(6) + f(8) < 2 \cdot f(7).$$

491. Niech funkcja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt[4]{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(79) + f(81) = \mathbf{39,79911\dots} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(80) = \mathbf{39,79911\dots} ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}}$$

oraz

$$f''(x) = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}} \cdot \frac{1}{4 \cdot x^{3/4}} - e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{3}{16 \cdot x^{7/4}} = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{x^{1/4} - 3}{16 \cdot x^{7/4}},$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościom

$$x^{1/4} - 3 < 0,$$

$$x^{1/4} < 3,$$

$$x < 81.$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[0; 81]$, skąd

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y \in [0; 81]$.

W szczególności

$$f(79) + f(81) < 2 \cdot f(80).$$

492. Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - 10 \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(1600) + f(1602) = \mathbf{-67,54267816\dots} \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(1601) = \mathbf{-67,54267816\dots} ?$$

Rozwiązanie:

Różniczkując dwukrotnie funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - \frac{10}{x}$$

oraz

$$f''(x) = -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{10}{x^2},$$

skąd nierówność $f''(x) < 0$ jest równoważna kolejnym nierównościami

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} + \frac{10}{x^2} &< 0, \\ \frac{1}{4 \cdot x^{3/2}} &> \frac{10}{x^2}, \\ \sqrt{x} &> 40, \\ x &> 1600. \end{aligned}$$

Zatem f jest ściśle wklęsła w przedziale $[1600; +\infty)$, skąd

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} < f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

czyli

$$f(x) + f(y) < 2 \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y \geq 1600$.

W szczególności

$$f(1600) + f(1602) < 2 \cdot f(1601).$$

493. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 432}$. Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(36,001) = f(36001/1000) \approx \mathbf{12,0001666666667}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{72001}{6000} = 12 + \frac{1}{6000} \approx \mathbf{12,0001666666667}.$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 432)^{2/3}}$$

oraz

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3 \cdot (x^2 + 432)^{2/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \frac{6 \cdot (x^2 + 432)}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \\ &= \frac{6x^2 + 6 \cdot 432 - 8x^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \frac{-2x^2 + 2 \cdot 36^2}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} = \frac{2 \cdot (-x^2 + 36^2)}{9 \cdot (x^2 + 432)^{5/3}} < 0 \end{aligned}$$

dla $x > 36$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[36, \infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x > 36$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 36. Ponieważ $f(36) = 12$ oraz $f'(36) = 1/6$, dla $x > 36$ zachodzi nierówność $f(x) < 12 + (x - 36)/6$ i w konsekwencji

$$f(36,001) < 12 + \frac{0,001}{6} = 12 + \frac{1}{6000} = \frac{72000}{6000} + \frac{1}{6000} = \frac{72001}{12}.$$

Odpowiedź: Wartość $f(36,001)$ jest mniejsza od $72001/6000$.

494. Dowieść, że nierówność

$$(n+1)^{3n+3} < n^{2n} \cdot (n+3)^{n+3}$$

zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej $n > 0$.

Rozwiązanie:

Po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e dana w zadaniu nierówność przybiera postać

$$3 \cdot f(n+1) < 2 \cdot f(n) + f(n+3), \quad (\spadesuit)$$

gdzie $f(x) = x \cdot \ln x$ dla $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$ oraz $f''(x) = 1/x > 0$, funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $(0, +\infty)$, skąd wynika nierówność

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y\right) < \frac{2}{3} \cdot f(x) + \frac{1}{3} \cdot f(y)$$

prawdziwa dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y . W szczególności dla $x = n$ oraz $y = n+3$ otrzymujemy

$$f\left(\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3} \cdot (n+3)\right) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3),$$

czyli

$$f(n+1) < \frac{2}{3} \cdot f(n) + \frac{1}{3} \cdot f(n+3),$$

a to po obustronnym pomnożeniu przez 3 daje nierówność (\spadesuit) .

495. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ W(x) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w zerze, muszą zachodzić warunki

$$W(0) = W'(0) = W''(0) = 0,$$

skąd

$$d = e = g = 0$$

i w konsekwencji

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1) = W'(1) = 1 \quad \text{oraz} \quad W''(1) = 0,$$

co wobec

$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2$$

oraz

$$W''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a + b + c & = 1 \\ 5a + 4b + 3c & = 1 \\ 20a + 12b + 6c & = 0 \end{cases}$$

który ma rozwiązanie $a = 3$, $b = -8$, $c = 6$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest $W(x) = 3x^5 - 8x^4 + 6x^3$.

496. Wyznaczyć taki wielomian piątego stopnia $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \leq -1 \\ W(x) & \text{dla } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna.

Rozwiązanie:

Niech

$$W(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g.$$

Aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna w punkcie -1 , muszą zachodzić warunki

$$W(-1) = -1 \quad \text{oraz} \quad W'(-1) = W''(-1) = 0.$$

Dwukrotną różniczkowalność funkcji f w jedynce otrzymamy pod warunkiem

$$W(1) = 1 \quad \text{oraz} \quad W'(1) = W''(1) = 0,$$

co wobec

$$W'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$$

oraz

$$W''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx + 2d$$

prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} -a + b - c + d - e + g & = -1 \\ a + b + c + d + e + g & = 1 \\ 5a - 4b + 3c - 2d + e & = 0 \\ 5a + 4b + 3c + 2d + e & = 0 \\ -20a + 12b - 6c + 2d & = 0 \\ 20a + 12b + 6c + 2d & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dodanie stronami równań pierwszego i drugiego, odjęcie trzeciego i czwartego, dodanie piątego i szóstego daje po uproszczeniu

$$\begin{cases} b+d+g & = & 0 \\ 2b+d & = & 0 \\ 6b+d & = & 0 \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $b=d=g=0$. W konsekwencji układ równań (1) po uproszczeniu przyjmuje postać

$$\begin{cases} a+c+e & = & 1 \\ 5a+3c+e & = & 0 \\ 10a+3c & = & 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a=3/8$, $c=-5/4$, $e=15/8$.

Odpowiedź: Wielomianem spełniającym warunki zadania jest

$$W(x) = \frac{3x^5 - 10x^3 + 15x}{8}.$$

497. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

a) Dla której wartości parametru A istnieje $f'(0)$ i ile jest równa?

b) Dla tej samej wartości parametru A wyznaczyć $f''(0)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h - 1}{h} - A}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - A \cdot h}{h^2}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - A}{2h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2}.$$

W celu obliczenia pochodnej drugiego rzędu w zerze musimy najpierw obliczyć pierwszą pochodną poza zerem:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2}.$$

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^h \cdot h - e^h + 1}{h^2} - 1/2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \cdot h - e^h + 1 - \frac{h^2}{2}}{h^3}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \cdot h + e^h - e^h - h}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h \cdot h - h}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{3h}.$$

Przy $h \rightarrow 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc ponownie zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{3} = \frac{1}{3}.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A = 1$ i wówczas $f'(0) = 1/2$ oraz $f''(0) = 1/3$.

498. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę rzeczywistą dodatnią C , że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x = y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(c)|,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y .

Zatem najmniejsza stała C , z którą prawdziwa jest nierówność podana w treści zadania, jest równa kresowi górnemu zbioru $\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

Obliczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}}.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^{-1/3}}{3 \cdot (1 + 2 \cdot x^{-2})^{2/3}} = 0.$$

Ponadto

$$f''(x) = \frac{2}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} - \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 2)^{5/3}}.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się f'' :

$$\frac{2}{3 \cdot (x^2 + 2)^{2/3}} = \frac{8x^2}{9 \cdot (x^2 + 2)^{5/3}},$$

$$3 \cdot (x^2 + 2) = 4x^2,$$

$$6 = x^2,$$

$$x = \pm\sqrt{6}.$$

Wyliczamy wartości funkcji f' w miejscach zerowych jej pochodnej:

$$f'(\pm\sqrt{6}) = \frac{\pm 2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot \left((\pm\sqrt{6})^2 + 2 \right)^{2/3}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 8^{2/3}} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 4} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Stąd wynika, że funkcja f' przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/\sqrt{6}$ i $1/\sqrt{6}$, a zatem $C = 1/\sqrt{6}$.

499. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = x^5 + x.$$

Podać dwie pary liczb (n, w) , gdzie n jest liczbą naturalną (całkowitą dodatnią) mniejszą od 100, a w liczbą wymierną, spełniające równanie

$$f''(n) = w.$$

Jeżeli licznik lub mianownik liczby w jest większy od 100, nie musi być zapisany w postaci dziesiętnej (może być zapisany np. w postaci potęgi albo w postaci iloczynu liczb dziesiętnych lub potęg).

$$f''(\mathbf{2}) = -\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{6^3}} = -\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{216}} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{54}} \qquad f''(\mathbf{34}) = -\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{81^3}} = -\frac{\mathbf{160}}{\mathbf{3^{12}}}$$

500. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w trzech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right) = -\mathbf{1/4} \qquad f''\left(\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}}\right) = -\mathbf{4/125} \qquad f''(12) = -\mathbf{3/500}$$

501. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + 2x.$$

Podać w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego wartości pochodnej drugiego rzędu funkcji f w czterech podanych punktach.

$$f''\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right) = -\mathbf{2/27} \qquad f''\left(\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}\right) = -\mathbf{1/54} \qquad f''(15) = -\mathbf{6/1331} \qquad f''\left(\frac{\mathbf{88}}{\mathbf{3}}\right) = -\mathbf{1/729}$$