389. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Uwaga: Nie wolno używać reguły de l'Hospitala lub w inny sposób omijać bezpośrednie korzystanie z definicji pochodnej. Ta sama uwaga dotyczy kolejnych dwóch zadań.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{y^2-x^2}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{(y-x)\cdot(y+x)}{\left(\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot(y-x)}=\lim_{y\to x}\frac{y+x}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$=\frac{x+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2\cdot x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

390. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x}$ na przedziale $(0,+\infty)$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz wzór na różnicę czwartych potęg otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x}}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{y-x}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\left(2\cdot\sqrt[4]{x}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}\,.$$

391. Korzystając **z definicji** pochodnej wyprowadzić wzór na pochodną funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^8+1}$.

Rozwiązanie:

Stosując definicję pochodnej oraz pięciokrotnie wzór na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim_{y\to x}\frac{\sqrt[4]{y^8+1}-\sqrt[4]{x^8+1}}{y-x}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{y^8-x^8}{\left(\sqrt{y^8+1}+\sqrt{x^8+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{y^8+1}+\sqrt[4]{x^8+1}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{(y-x)\cdot(y+x)\cdot(x^2+y^2)\cdot(x^4+y^4)}{\left(\sqrt{y^8+1}+\sqrt{x^8+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{y^8+1}+\sqrt[4]{x^8+1}\right)\cdot(y-x)}=$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{(y+x)\cdot(x^2+y^2)\cdot(x^4+y^4)}{\left(\sqrt{y^8+1}+\sqrt{x^8+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{y^8+1}+\sqrt[4]{x^8+1}\right)}=$$

$$=\frac{(x+x)\cdot(x^2+x^2)\cdot(x^4+x^4)}{\left(\sqrt{x^8+1}+\sqrt{x^8+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+1}+\sqrt[4]{x^8+1}\right)}=$$

$$=\frac{2x\cdot 2x^2\cdot 2x^4}{2\sqrt{x^8+1}\cdot 2\sqrt[4]{x^8+1}}=\frac{2x^7}{(x^8+1)^{3/4}}\,.$$

W każdym z kolejnych 10 zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji w trzech podanych punktach.

392. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad f'(1)=\mathbf{1/3}$ $\quad f'(8)=\mathbf{1/12}$ $\quad f'(27)=\mathbf{1/27}$

393. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ $\quad f'(1)=\mathbf{-1/2}$ $\quad f'(2)=\mathbf{-8/125}$ $\quad f'(3)=\mathbf{-3/250}$

394. $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg} 2$ $\quad f'(1)=\mathbf{1}$ $\quad f'(2)=\mathbf{4/5}$ $\quad f'(3)=\mathbf{3/5}$

395. $f(x)=\ln\left(x^3+1\right)$ $\quad f'(1)=\mathbf{3/2}$ $\quad f'(2)=\mathbf{4/3}$ $\quad f'(3)=\mathbf{27/28}$

396. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$ $\quad f'(1)=\mathbf{1}$ $\quad f'(2)=\mathbf{4/17}$ $\quad f'(3)=\mathbf{3/41}$

397. $f(x)=\sqrt{24x+1}$ $\quad f'(0)=\mathbf{12}$ $\quad f'(1)=\mathbf{12/5}$ $\quad f'(2)=\mathbf{12/7}$

398. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x+8}$ $\quad f'(-1)=\mathbf{1/6}$ $\quad f'(0)=\mathbf{-1/12}$ $\quad f'(1)=\mathbf{1/6}$

399. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2+9}}$ $\quad f'(-1)=\mathbf{1/27}$ $\quad f'(0)=\mathbf{0}$ $\quad f'(1)=\mathbf{-1/27}$

400. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^5-x+32}}$ $\quad f'(-1)=\mathbf{-1/80}$ $\quad f'(0)=\mathbf{1/320}$ $\quad f'(1)=\mathbf{-1/80}$

401. $f(x)=\sqrt{8x+1}\cdot\sqrt[3]{7x^2+1}$ $\quad f'(0)=\mathbf{4}$ $\quad f'(1)=\mathbf{37/6}$ $\quad f'(3)=\mathbf{303/40}$

402. Wyznaczyć równanie prostej, która jest styczna do obydwu następujących parabol: paraboli o równaniu $y=x^2$ oraz paraboli o równaniu $y=x^2-8x$.

Rozwiązanie:

Niech $(a,\,a^2)$ i $(b,\,b^2-8b)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x)=x^2$ i $g(x)=x^2-8x$. Ponieważ $f'(x)=2x$ oraz $g'(x)=2x-8$, równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a) \quad \text{oraz} \quad y=g'(b)\cdot(x-b)+g(b)\,,$$

czyli

$$y=2a\cdot x-a^2 \quad \text{oraz} \quad y=(2b-8)\cdot x-b^2\,.$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a=2b-8 \quad \text{oraz} \quad -a^2=-b^2\,.$$

Z drugiego równania otrzymujemy $a=\pm b$, a ponieważ pierwsze równanie daje $b-a=4\neq 0$, musi być $a=-b$. Stąd $b=2$ oraz $a=-2$.

W konsekwencji szukana prosta ma równanie

$$y = -4x - 4 .$$

403. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = -x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a,\, a^2+2)$ i $(b,\, -b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = -x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \quad \text{oraz} \quad g'(x) = -2x ,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a) \quad \text{oraz} \quad y = g'(b) \cdot (x-b) + g(b) ,$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \quad \text{oraz} \quad y = -2b \cdot x + b^2 .$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = -2b \quad \text{oraz} \quad -a^2 + 2 = b^2 .$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $b = -a$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $a = \pm 1$ oraz $b = \mp 1$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y = 2x + 1 \quad \text{oraz} \quad y = -2x + 1 .$$

404. Na potrzeby tego zadania prostą nazwiemy *fajną*, jeśli jest styczna do obydwu następujących parabol: do paraboli o równaniu $y = x^2 + 2$ oraz do paraboli o równaniu $y = 2x^2$. Wyznaczyć równania wszystkich *fajnych* prostych.

Rozwiązanie:

Niech $(a,\, a^2+2)$ i $(b,\, 2b^2)$ będą punktami styczności szukanej prostej odpowiednio do wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 2x^2$. Ponieważ

$$f'(x) = 2x \qquad \text{oraz} \qquad g'(x) = 4x ,$$

równanie szukanej prostej ma jednocześnie postać

$$y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a) \qquad \text{oraz} \qquad y = g'(b) \cdot (x-b) + g(b) ,$$

czyli

$$y = 2a \cdot x - a^2 + 2 \qquad \text{oraz} \qquad y = 4b \cdot x - 2b^2 .$$

Aby obydwa powyższe równania definiowały tę samą prostą, muszą zachodzić równości

$$2a = 4b \qquad \text{oraz} \qquad -a^2 + 2 = -2b^2 .$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $a=2b$, co po wstawieniu do drugiego równania prowadzi do $b=\pm 1$ oraz $a=\pm 2$.

W konsekwencji istnieją dwie *fajne* proste, a ich równania to

$$y=4x-2 \qquad \text{oraz} \qquad y=-4x-2\,.$$

405. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^5}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+x^5}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^3+x^5}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{1+x^2}=1\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna w zerze.

406. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^6}$ jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Z definicji pochodnych jednostronnych otrzymujemy

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{\sqrt[4]{x^4}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^6}{x^4}}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\sqrt[4]{1+x^2}=1$$

oraz

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{-|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^6}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$
$$=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^6}{x^4}}=-\lim_{x\to 0^-}\sqrt[4]{1+x^2}=-1\,.$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja nie jest tam różniczkowalna.

Odpowiedź: Funkcja f nie jest różniczkowalna w zerze.

407. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{\sqrt[4]{h^2+1}-1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^2+1}+1\right)}}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^2+1}+1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{1}{2}\,.$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{\sqrt[4]{h^2+1}-1}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^2+1}+1\right)}}}{-|h|}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}-\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^2+1}+1\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}}=-\frac{1}{2}\,.$$

Ponieważ pochodne jednostronne funkcji f w zerze są różne, funkcja ta nie jest różniczkowalna w zerze.

408. Wyznaczyć taką wartość rzeczywistą parametru a, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}+a\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{x^4+1}-1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną prawostronną funkcji f w zerze:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1}+a\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{h^4+1}-1}-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}}+a\cdot\sqrt[4]{\frac{h^4}{\left(\sqrt{h^4+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^4+1}+1\right)}}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}}+a\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\sqrt{h^4+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^4+1}+1\right)}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt[4]{4}}=\frac{1+a}{\sqrt{2}}\,.$$

Analogicznie obliczamy pochodną lewostronną funkcji f w zerze:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{\sqrt{h^2+1}-1}+a\cdot\sqrt[4]{\sqrt[4]{h^4+1}-1}-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+1}+1}}+a\cdot\sqrt[4]{\frac{h^4}{\left(\sqrt{h^4+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^4+1}+1\right)}}}{-|h|}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\left(-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{h^2+1}+1}}-a\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\sqrt{h^4+1}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{h^4+1}+1\right)}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt[4]{4}}=\frac{-1-a}{\sqrt{2}}\,.$$

Funkcja f jest różniczkowalna w zerze wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(0^+)=f'(0^-)$, czyli

$$\frac{1+a}{\sqrt{2}}=\frac{-1-a}{\sqrt{2}},$$

co zachodzi dla $a=-1$.

Odpowiedź: Podana funkcja jest różniczkowalna w zerze dla $a=-1$.

W każdym z kolejnych 7 zadań dla podanej funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ podaj wartości pochodnych jednostronnych funkcji f_i w zerze.

409. $f_1(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}$ $\quad f_1'(0^-)=\mathbf{-1/\sqrt{2}}$ $\quad f_1'(0^+)=\mathbf{1/\sqrt{2}}$

410. $f_2(x)=\sqrt{\sqrt{2x^2+1}-1}$ $\quad f_2'(0^-)=\mathbf{-1}$ $\quad f_2'(0^+)=\mathbf{1}$

411. $f_3(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+4}-2}$ $\quad f_3'(0^-)=\mathbf{-1/2}$ $\quad f_3'(0^+)=\mathbf{1/2}$

412. $f_4(x)=\sqrt{\sqrt{8x^2+81}-9}$ $\quad f_4'(0^-)=\mathbf{-2/3}$ $\quad f_4'(0^+)=\mathbf{2/3}$

413. $f_5(x)=\sqrt{\sqrt[4]{2x^2+1}-1}$ $\quad f_5'(0^-)=\mathbf{-1/\sqrt{2}}$ $\quad f_5'(0^+)=\mathbf{1/\sqrt{2}}$

414. $f_6(x)=\sqrt{\sqrt[4]{x^2+16}-2}$ $\quad f_6'(0^-)=\mathbf{-1/\left(4\sqrt{2}\right)}$ $\quad f_6'(0^+)=\mathbf{1/\left(4\sqrt{2}\right)}$

415. $f_7(x)=\sqrt{\sqrt[4]{8x^2+81}-3}$ $\quad f_7'(0^-)=\mathbf{-\left(\sqrt{2}\right)/\left(3\sqrt{3}\right)}$ $\quad f_7'(0^+)=\mathbf{\left(\sqrt{2}\right)/\left(3\sqrt{3}\right)}$

416. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=1+x+2\sqrt{x}.$$

Funkcja g jest złożeniem 100 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Obliczyć $g'(100)$.

Rozwiązanie:

Niech f_n będzie złożeniem n egzemplarzy funkcji f. Udowodnimy przez indukcję, że

$$f_n(x)=\left(\sqrt{x}+n\right)^2.$$

1° Zauważmy, że

$$f_1(x)=f(x)=\left(\sqrt{x}+1\right)^2,$$

zatem dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n=1$.

2° Zakładając

$$f_n(x)=\left(\sqrt{x}+n\right)^2,$$

otrzymujemy

$$f_{n+1}(x)=f\left(f_n(x)\right)=f\left(\left(\sqrt{x}+n\right)^2\right)=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}+n\right)^2}+1\right)^2=\left(\sqrt{x}+n+1\right)^2,$$

co kończy zasadniczą część dowodu indukcyjnego.

Ponieważ $g=f_{100}$,

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+100\right)^2=2\cdot\left(\sqrt{x}+100\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+100}{\sqrt{x}}=1+\frac{100}{\sqrt{x}}\,,$$

skąd $g'(100)=11$.

417. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{1301}<\operatorname{arctg} 51-\operatorname{arctg} 49<\frac{1}{1201}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\operatorname{arctg} x$ na przedziale $[49, 51]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(49, 51)$, że

$$\operatorname{arctg} 51-\operatorname{arctg} 49=(51-49)\cdot f'(c)=2\cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $49<c<51$ otrzymujemy

$$\frac{1}{1301}=\frac{2}{2602}=\frac{2}{51^2+1}\quad<\quad\operatorname{arctg} 51-\operatorname{arctg} 49=\frac{2}{c^2+1}\quad<\quad\frac{2}{49^2+1}=\frac{2}{2402}=\frac{1}{1201}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

418. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{9}<\ln 9-\ln 8<\frac{1}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\ln x$ na przedziale $[8, 9]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(8, 9)$, że

$$\ln 9-\ln 8=f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x}\,,$$

z nierówności $8<c<9$ otrzymujemy

$$\frac{1}{9}\quad<\quad\ln 9-\ln 8=f'(c)=\frac{1}{c}\quad<\quad\frac{1}{8}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

419. Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{34}<\operatorname{arctg} 13-\operatorname{arctg} 8<\frac{1}{13}\,.$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[8, 13]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (8, 13)$, że

$$\operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 = (13-8) \cdot f'(c) = 5 \cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $8 < c < 13$ otrzymujemy

$$\frac{1}{34} = \frac{5}{170} = \frac{5}{13^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 8 = \frac{5}{c^2+1} \quad < \quad \frac{5}{8^2+1} = \frac{5}{65} = \frac{1}{13}\,,$$

co kończy dowód nierówności podanych w treści zadania.

420. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 12 < \operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg} 10\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (oficjalny):

Podana nierówność może być przepisana w postaci

$$\operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 10 < \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 6\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziałach $[6, 7]$ oraz $[10, 12]$ wynika istnienie takich liczb $c \in (6, 7)$ oraz $d \in (10, 12)$, że

$$\operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 6 = f'(c)\,.$$

oraz

$$\operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 10 = 2 \cdot f'(d)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $6 < c < 7$ oraz $10 < d < 12$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{50} \quad < \quad \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 6 = f'(c) = \frac{1}{c^2+1} \quad < \quad \frac{1}{37}$$

oraz

$$\frac{2}{145} \quad < \quad \operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 10 = 2 \cdot f'(d) = \frac{2}{d^2+1} \quad < \quad \frac{2}{101}\,.$$

W konsekwencji

$$\operatorname{arctg} 12 - \operatorname{arctg} 10 < \frac{2}{101} < \frac{2}{100} = \frac{1}{50} < \operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 6\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

Sposób II (rachunkowy):

Niech

$$f(x) = \operatorname{arctg}(6+x) + \operatorname{arctg}(12-2x)$$

będzie funkcją, która dla $x=0$ i $x=1$ przyjmuje wartości równe odpowiednio lewej i prawej stronie dowodzonej nierówności. Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że funkcja f jest rosnąca na przedziale $(0, 1)$, a do tego wystarczy wykazać dodatniość jej pochodnej na tym przedziale. Miłośnicy rachunków bez trudu stwierdzą, że

$$f'(x)=\frac{1}{(6+x)^2+1}+\frac{-2}{(12-2x)^2+1}=\frac{2x^2-72x+71}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=$$
$$=\frac{2x^2-4x-68x+2+68+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)}=\frac{2\cdot(x-1)^2+68\cdot(1-x)+1}{((6+x)^2+1)\cdot((12-2x)^2+1)},$$

co wobec dodatniości ostatniego wyrażenia dla $x\leqslant 1$ kończy rozwiązanie zadania.

Sposób III (wymaga znajomości pewnej sztuczki):

Skorzystamy z tego, że $\operatorname{arctg} x$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ix$ oraz z faktu, że przy mnożeniu liczb zespolonych ich argumenty się dodają.

Wobec tego $\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12$ jest argumentem liczby

$$(1+6i)\cdot(1+12i)=1+18i-72=-71+18i=71\cdot\left(-1+\frac{18}{71}\cdot i\right),$$

natomiast $\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10$ jest argumentem liczby

$$(1+7i)\cdot(1+10i)=1+17i-70=-69+17i=69\cdot\left(-1+\frac{17}{69}\cdot i\right).$$

Zatem lewa i prawa strona dowodzonej nierówności są równe odpowiednio argumentom liczb

$$-1+\frac{18}{71}\cdot i \qquad \text{oraz} \qquad -1+\frac{17}{69}\cdot i\,.$$

Wobec tego dowodzona nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{18}{71}>\frac{17}{69},$$

którą możemy wykazać następująco:

$$\frac{18}{71}>\frac{18}{72}=\frac{1}{4}=\frac{17}{68}>\frac{17}{69}.$$

Uwagi: Ponieważ argumentem liczby zespolonej $-1+\frac{1}{4}\cdot i=-\left(1-\frac{1}{4}\cdot i\right)$ jest liczba

$$\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} 4\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} 4,$$

faktycznie udowodniliśmy nierówności

$$\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12<\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} 4<\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10\,.$$

Zwróćmy też uwagę, że postępując podobnie jak powyżej, strony dowodzonej nierówności można zapisać jako:

$$\operatorname{arctg} 6+\operatorname{arctg} 12=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{71}{18}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(4-\frac{1}{18}\right)$$

oraz

$$\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 10=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{69}{17}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(4+\frac{1}{17}\right).$$

Metodami podobnymi do powyższych można udowodnić nierówności równoważne danej w zadaniu nierówności:

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10=\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{121}\right)<\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{86}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{43}\right)=\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 6\,,$$

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 7=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{17}\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{68}\right)<\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{61}\right)=\operatorname{arctg} 10-\operatorname{arctg} 6$$

oraz

$$\operatorname{arctg} 12-\operatorname{arctg} 10-\operatorname{arctg} 7+\operatorname{arctg} 6=\operatorname{arctg}\left(\frac{7}{1041}\right)>0\,.$$

421. Udowodnić nierówność

$$26\cdot e^{\operatorname{arctg} 5}<25\cdot e^{\operatorname{arctg} 7}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowowdzona nierówność po obustronnym zlogarytmowaniu przy podstawie e przyjmuje postać

$$\ln 26+\operatorname{arctg} 5<\ln 25+\operatorname{arctg} 7\,,$$

co można przepisać jako

$$\ln 26-\ln 25<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5\,.$$

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\ln x$ na przedziale $[25,\,26]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(25,\,26)$, że

$$\ln 26-\ln 25=(26-25)\cdot f'(c)=f'(c)\,.$$

Ponadto z twierdzenia Lagrange'a zastosowanego do funkcji $g(x)=\operatorname{arctg} x$ na przedziale $[5,\,7]$ wynika istnienie takiej liczby $d\in(5,\,7)$, że

$$\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5=(7-5)\cdot g'(d)=2\cdot g'(d)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

oraz

$$g'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $25<c<26$ oraz $5<d<7$ otrzymujemy odpowiednio

$$\frac{1}{26}\quad<\quad\ln 26-\ln 25=f'(c)=\frac{1}{c}\quad<\quad\frac{1}{25}$$

oraz

$$\frac{1}{25}=\frac{2}{50}\quad<\quad\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5=2\cdot g'(d)=\frac{2}{d^2+1}\quad<\quad\frac{2}{26}=\frac{1}{13}\,.$$

W konsekwencji

$$\ln 26-\ln 25<\frac{1}{25}<\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5\,,$$

co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

422. Dana jest funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt[\pi]{x^\pi+\pi}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość
$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\,,$$
gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzi nierówność
$$|f'(x)|\leqslant 1\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:
$$|f'(x)|=\left|\frac{1}{\pi}\left(x^\pi+\pi\right)^{1/\pi-1}\cdot\pi x^{\pi-1}\right|=\frac{x^{\pi-1}}{\left(x^\pi+\pi\right)^{1-1/\pi}}=\frac{x^{\pi-1}}{\left(x^\pi+\pi\right)^{(\pi-1)/\pi}}=\frac{\left(x^\pi\right)^{(\pi-1)/\pi}}{\left(x^\pi+\pi\right)^{(\pi-1)/\pi}}=$$
$$=\left(\frac{x^\pi}{x^\pi+\pi}\right)^{(\pi-1)/\pi}<1\,,$$
co kończy rozwiązanie zadania.

423. Dana jest funkcja $f:[-10,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{10x^2+9000}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\,y\in[-10,10]$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość
$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\,,$$
gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-10,10]$ zachodzi nierówność
$$|f'(x)|\leqslant 1\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x|\leqslant 10$ prowadzą do:
$$|f'(x)|=\left|\frac{10x}{\sqrt{10x^2+9000}}\right|=\frac{10\cdot|x|}{\sqrt{10x^2+9000}}=\frac{10}{\sqrt{10+\frac{9000}{x^2}}}\leqslant\frac{10}{\sqrt{10+\frac{9000}{10^2}}}=\frac{10}{\sqrt{10+90}}=\frac{10}{10}=1\,,$$
co kończy rozwiązanie zadania.

424. Dana jest funkcja $f:[-10,10]\to\mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x)=\sqrt{5x^2+125}\,.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\, y\in[-10,\, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2\cdot|x-y| \; .$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y| \; ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-10,\, 10]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 2\, .$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x|\leqslant 10$ prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{5x}{\sqrt{5x^2+125}}\right|=\frac{5\cdot|x|}{\sqrt{5x^2+125}}=\frac{5}{\sqrt{5+\frac{125}{x^2}}}\leqslant\frac{5}{\sqrt{5+\frac{125}{10^2}}}=\frac{5}{\sqrt{6,25}}=\frac{5}{2,5}=2\, ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

425. Dana jest funkcja $f:[-1,\, 1]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{2x^2+2}\, .$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\, y\in[-1,\, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y| \; .$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y| \; ,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x\in[-1,\, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 1\, .$$

Dla $x=0$ powyższa nierówność jest oczywista wobec $f'(0)=0$, a dla $x\neq 0$ bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością $|x|\leqslant 1$ prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2}}\right|=\frac{2\cdot|x|}{\sqrt{2x^2+2}}=\frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{x^2}}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{1^2}}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1\, ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

426. Dana jest funkcja $f:[-4,\, 4]\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\sqrt{x^2+9}\, .$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x,\, y\in[-4,\, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y| \; .$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Należy udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y\in[-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|\leqslant\frac{4}{5}\cdot|x-y|\ .$$

Przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:

$$\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|=\left|\sqrt{x^2+9}-\sqrt{y^2+9}\right|\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}=$$

$$=\frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}=|x-y|\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}\ .$$

Dowód danej w treści zadania nierówności będzie zakończony, jeśli wykażemy nierówność

$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}}\leqslant\frac{4}{5}\,,$$

która jest równoważna nierówności

$$|x+y|\leqslant\frac{4}{5}\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right)\ .$$

Powyższą nierówność dowodzimy korzystając z nierówności trójkąta, wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ oraz uwzględniając nierówności $x^2\leqslant16$ i $y^2\leqslant16$:

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=\sqrt{\frac{9x^2}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9y^2}{25}+\frac{16y^2}{25}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{9\cdot16}{25}+\frac{16x^2}{25}}+\sqrt{\frac{9\cdot16}{25}+\frac{16y^2}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}\cdot(x^2+9)}+\sqrt{\frac{16}{25}\cdot(y^2+9)}=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}\right)\ .$$

Sposób II:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|\ ,$$

gdzie c leży między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby $x\in[-4, 4]$ zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant\frac{4}{5}\,.$$

Bezpośrednie wyliczenia prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}\right|=\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right|=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}\,,$$

co jest oczywiście mniejsze od $4/5$ dla $x=0$, natomiast dla $x\neq0$ możemy kontynuować oszacowania:

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{25/16}}=\frac{4}{5}\,.$$

427. Niech funkcja $f:[4,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$f(x)=\frac{1}{x^4}\,.$$
Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, $y\in[4,\infty)$ zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{256}\,.$$

Rozwiązanie:

Sposób I:

Przekształcamy i szacujemy lewą stronę dowodzonej nierówności korzystając z nierówności x, $y\geqslant 4$:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x^3+x^2y+xy^2+y^3)}{x^4y^4}=$$
$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x^3}{x^4y^4}+\frac{x^2y}{x^4y^4}+\frac{xy^2}{x^4y^4}+\frac{y^3}{x^4y^4}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{xy^4}+\frac{1}{x^2y^3}+\frac{1}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y}\right)\leqslant$$
$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^5}\right)=|x-y|\cdot\frac{4}{4^5}=|x-y|\cdot\frac{1}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{256}\,,$$
co kończy dowód danej w treści zadania nierówności dla dowolnych x, $y\geqslant 4$.

Nieco inna postać oszacowań:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}\right|=\left|\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right|=\frac{|x-y|\cdot(x+y)\cdot(x^2+y^2)}{x^4y^4}=|x-y|\cdot\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^3y^3}=$$
$$=|x-y|\cdot\left(\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^3y^3}+\frac{y^2}{x^3y^3}\right)=|x-y|\cdot\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{xy^3}+\frac{1}{x^3y}\right)\leqslant$$
$$\leqslant|x-y|\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^4}\right)=|x-y|\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{4^4}=|x-y|\cdot\frac{1}{256}\,.$$

Sposób II:

Dowodzona nierówność jest oczywista w przypadku $x=y$, natomiast dla $x\neq y$ stosujemy do funkcji f twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Na mocy tego twierdzenia istnieje taka liczba c pomiędzy x i y, a więc spełniająca nierówność $c>4$, że
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(c)|=\left|\frac{-4}{c^5}\right|=\frac{4}{c^5}<\frac{4}{4^5}=\frac{1}{4^4}=\frac{1}{256}\,,$$
co kończy dowód nierówności podanej w treści zadania.

428. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(e^x+e^{-x}\right).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x, co dowodzimy następująco:

$$|f'(x)|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|=\frac{|e^x-e^{-x}|}{e^x+e^{-x}}\leqslant\frac{|e^x|+|-e^{-x}|}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1.$$

429. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right).$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|.$$

Rozwiązanie:

Dla $x=y$ dowodzona nierówność jest oczywista, natomiast przy $x\neq y$ z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\cdot|x-y|,$$

gdzie c jest pewną liczbą leżącą między x i y. Rozwiązanie zadania będzie zakończone, jeśli wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$|f'(x)|\leqslant 1.$$

Bezpośrednie wyliczenia połączone z nierównością między średnimi geometryczną i arytmetyczną prowadzą do:

$$|f'(x)|=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|=\frac{\sqrt{x^2\cdot 1}}{\frac{x^2+1}{2}}\leqslant 1,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

430. Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$ spełnia warunki $f(1)=-2/3$ oraz $f(2)=-2/5$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że

$$f'(x)=(f(x))^2 .$$

Wskazówka: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $g:(0,+\infty)\to(-\infty,0)$ określoną wzorem $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Wówczas $g(1)=-3/2$ i $g(2)=-5/2$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(1,2)$, że

$$g'(c)=\frac{g(2)-g(1)}{2-1}=\frac{-5/2-(-3/2)}{1}=-1 .$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2} ,$$

skąd

$$-\frac{f'(c)}{(f(c))^2}=-1 ,$$

czyli

$$f'(c)=(f(c))^2 .$$

431. Funkcja różniczkowalna $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ spełnia warunki $f(2)=1$ i $f(4)=4$. Dowieść, że stąd wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej dodatniej x, że

$$f'(x)=\sqrt{f(x)} .$$

Wskazówka: $g(x)=2\cdot\sqrt{f(x)}$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ określoną wzorem $g(x)=2\cdot\sqrt{f(x)}$. Wówczas $g(2)=2$ i $g(4)=4$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika istnienie takiej liczby rzeczywistej $c\in(2,4)$, że

$$g'(c)=\frac{g(4)-g(2)}{4-2}=1 .$$

Z drugiej strony

$$g'(x)=2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} ,$$

skąd

$$\frac{f'(c)}{\sqrt{f(c)}}=1 ,$$

czyli

$$f'(c)=\sqrt{f(c)} .$$

432. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-3\cdot|x+1|$$

na przedziale $[-2, 2]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x\in[-1, +\infty) \\ -x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty, -1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x-3 & \text{dla} \quad x\in[-1, 2] \\ x^2+3x+3 & \text{dla} \quad x\in[-2, -1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 2]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{dla} \quad x\in(-1, 2) \\ 2x+3 & \text{dla} \quad x\in(-2, -1) \end{cases}$$

W punkcie -1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1, 2)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-3=0$, co ma rozwiązanie $x=3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1, 2)$.

2° W przypadku $x\in(-2, -1)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+3=0$, co ma rozwiązanie $x=-3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 2,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -1.

$$f(-2)=1\,,$$
$$f(-3/2)=3/4\,,$$
$$f(-1)=1\,,$$
$$f(3/2)=-21/4=-5,25\,,$$
$$f(2)=-5\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-21/4$ w punkcie $3/2$, a wartość największą równą 1 w punktach -2 oraz -1.

433. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x+\left|x^2-6\right|$$
na przedziale $[-4,\,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$\left|x^2-6\right|=\begin{cases} x^2-6 & \text{dla } x\in\left(-\infty,\,-\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6},\,+\infty\right) \\ -x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6},\,\sqrt{6}\right) \end{cases}$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} x+x^2-6 & \text{dla } x\in\left[-4,\,-\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6},\,3\right] \\ x-x^2+6 & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6},\,\sqrt{6}\right) \end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4,\,3]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x & \text{dla } x\in\left(-4,\,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},\,3\right) \\ 1-2x & \text{dla } x\in\left(-\sqrt{6},\,\sqrt{6}\right) \end{cases}$$
W punktach $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in\left(-4,\,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},\,3\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $1+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1/2$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $\left(-4,\,-\sqrt{6}\right)\cup\left(\sqrt{6},\,3\right)$.

2° W przypadku $x\in\left(-\sqrt{6},\,\sqrt{6}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $1-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1/2$, które należy do rozważanego przedziału $\left(-\sqrt{6},\,\sqrt{6}\right)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -4 i 3,
- miejsce zerowe pochodnej: $1/2$,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-\sqrt{6}$ i $\sqrt{6}$.

$$f(-4)=6\,,$$
$$f\left(-\sqrt{6}\right)=-\sqrt{6}\,,$$
$$f(1/2)=6,25\,,$$
$$f\left(\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}\,,$$
$$f(3)=6\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-\sqrt{6}$ w punkcie $-\sqrt{6}$, a wartość największą równą $6,25=25/4$ w punkcie $1/2$.

434. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x+\left|x^2-x-6\right|$$
na przedziale $[-5, 5]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że
$$x^2-x-6=(x-3)\cdot(x+2)\,.$$
Stąd
$$\left|x^2-x-6\right|=\begin{cases} x^2-x-6 & \text{dla } x\in(-\infty, -2]\cup[3, +\infty) \\ -x^2+x+6 & \text{dla } x\in(-2, 3)\end{cases}$$
a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} x^2-6 & \text{dla } x\in[-5, -2]\cup[3, 5] \\ -x^2+2x+6 & \text{dla } x\in(-2, 3)\end{cases}$$
W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-5, 5]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{dla } x\in(-5, -2)\cup(3, 5) \\ -2x+2 & \text{dla } x\in(-2, 3)\end{cases}$$
W punktach -2 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-5, -2)\cup(3, 5)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x=0$, co ma rozwiązanie $x=0$, które jednak nie należy do rozważanego zbioru $(-5, -2)\cup(3, 5)$.

2° W przypadku $x\in(-2, 3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, 3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:
- końce przedziału: -5 i 5,
- miejsce zerowe pochodnej: 1,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -2 i 3.

$$f(-5)=19\,,$$
$$f(-2)=-2\,,$$
$$f(1)=7\,,$$
$$f(3)=3\,,$$
$$f(5)=19\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie -2, a wartość największą równą 19 w punktach -5 i 5.

435. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem
$$f(x)=x^2-\sqrt{4x^2+4x+1}$$
na przedziale $[-3,\,3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|=\begin{cases} 2x+1 & \text{dla} \quad x\in[-1/2,\,+\infty) \\ -2x-1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-1/2) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci
$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & \text{dla} \quad x\in[-1/2,\,3] \\ x^2+2x+1 & \text{dla} \quad x\in[-3,\,-1/2) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-3,\,3]$ jest dana wzorem
$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{dla} \quad x\in(-1/2,\,3) \\ 2x+2 & \text{dla} \quad x\in(-3,\,-1/2) \end{cases}$$

W punkcie $-1/2$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1/2,\,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-2=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/2,\,3)$.

2° W przypadku $x\in(-3,\,-1/2)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+2=0$, co ma rozwiązanie $x=-1$, które należy do rozważanego przedziału $(-3,\,-1/2)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

• końce przedziału: -3 i 3,
• miejsca zerowe pochodnej: -1 i 1,
• punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/2$.

$$f(-3)=4\,,$$
$$f(-1)=0\,,$$
$$f(-1/2)=1/4=0{,}25\,,$$
$$f(1)=-2\,,$$
$$f(3)=2\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -2 w punkcie 1, a wartość największą równą 4 w punkcie -3.

436. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2$$

na przedziale $[-2, 3]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+1}-x^2=\sqrt{(3x+1)^2}-x^2=|3x+1|-x^2$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1-x^2 & \text{dla} \quad x\in[-1/3,\, 3] \\ -3x-1-x^2 & \text{dla} \quad x\in[-2,\, -1/3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-2, 3]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{dla} \quad x\in(-1/3,\, 3) \\ -3-2x & \text{dla} \quad x\in(-2,\, -1/3) \end{cases}$$

W punkcie $-1/3$ pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-1/3, 3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-1/3, 3)$.

2° W przypadku $x\in(-2, -1/3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $-3-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-3/2$, które należy do rozważanego przedziału $(-2, -1/3)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -2 i 3,
- miejsca zerowe pochodnej: $-3/2$ i $3/2$,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: $-1/3$.

$$f(-2)=1\,,$$
$$f(-3/2)=5/4\,,$$
$$f(-1/3)=-1/9\,,$$
$$f(3/2)=13/4\,,$$
$$f(3)=1\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą $-1/9$ w punkcie $-1/3$, a wartość największą równą $13/4$ w punkcie $3/2$.

437. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=3x+\left|x^3-9x\right|$$

na przedziale $\left[-4, \sqrt{10}\right]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^3-9x=(x-3)\cdot x\cdot (x+3)\,.$$

Stąd

$$\left|x^3-9x\right|=\begin{cases} x^3-9x & \text{dla} \quad x\in[-3,\,0]\cup[3,\,+\infty) \\ -x^3+9x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-3)\cup\in(0,\,3) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x & \text{dla} \quad x\in[-3,\,0]\cup\left[3,\,\sqrt{10}\right] \\ -x^3+12x & \text{dla} \quad x\in[-4,\,-3)\cup\in(0,\,3) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $\left[-4,\,\sqrt{10}\right]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6 & \text{dla} \quad x\in(-3,\,0)\cup\left(3,\,\sqrt{10}\right) \\ -3x^2+12 & \text{dla} \quad x\in(-4,\,-3)\cup\in(0,\,3) \end{cases}$$

W punktach -3, 0 i 3 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-3,\,0)\cup\left(3,\,\sqrt{10}\right)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=6$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm\sqrt{2}$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=-\sqrt{2}$, należy do rozważanego zbioru $(-3,\,0)\cup\left(3,\,\sqrt{10}\right)$.

2° W przypadku $x\in(-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $3x^2=12$, co ma dwa rozwiązania $x=\pm 2$, z których tylko jedno, a mianowicie $x=2$, należy do rozważanego zbioru $(-4,\,-3)\cup\in(0,\,3)$.

Porównamy wartości funkcji f w siedmiu punktach:
- końce przedziału: -4 i $\sqrt{10}$,
- miejsca zerowe pochodnej: $-\sqrt{2}$ i 2,
- punkty, w których podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -3, 0 i 3.

$$f(-4)=16\,, \qquad f(-3)=-9\,, \qquad f(0)=13\,, \qquad f(2)=16\,, \qquad f(3)=9\,,$$

$$f\left(-\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^3+6\cdot\sqrt{2}=-2\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}\in(4,\,8), \quad \text{bo} \quad \sqrt{2}\in(1,\,2)\,,$$

$$f\left(\sqrt{10}\right)=\left(\sqrt{10}\right)^3-6\cdot\sqrt{10}=10\cdot\sqrt{10}-6\cdot\sqrt{10}=4\cdot\sqrt{10}\in(12,\,16), \quad \text{bo} \quad \sqrt{10}\in(3,\,4)\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -9 w punkcie -3, a wartość największą równą 16 w punktach -4 i 2.

438. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=2x+\sqrt{x^4-98x^2+7^4}$$

na przedziale $[-11,\,9]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x)=2x+\sqrt{x^4-98x^2+7^4}=2x+\sqrt{(x^2-49)^2}=2x+\left|x^2-49\right|\,, \tag{1}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} 2x+x^2-49 & \text{dla} \quad x\in[-11,\,-7]\cup[7,\,9] \\ 2x-x^2+49 & \text{dla} \quad x\in(-7,\,7) \end{cases} \tag{2}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-11,\,9]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2+2x & \text{dla} \quad x\in(-11,\,-7)\cup(7,\,9) \\ 2-2x & \text{dla} \quad x\in(-7,\,7) \end{cases} \tag{3}$$

W punktach ± 7 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć te punkty do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(-11,\,-7)\cup(7,\,9)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2+2x=0$, co ma rozwiązanie $x=-1$, które **nie należy** do rozważanego zbioru $(-11,\,-7)\cup(7,\,9)$.

2° W przypadku $x\in(-7,\,7)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2-2x=0$, co ma rozwiązanie $x=1$, które **należy** do rozważanego przedziału $(-7,\,7)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -11 i 9,
- miejsce zerowe pochodnej: 1,
- punkty, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: -7 i 7.

$$f(-11)=50\,,$$

$$f(-7)=-14\,,$$

$$f(1)=50\,,$$

$$f(7)=14\,,$$

$$f(9)=50\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -14 w punkcie -7, a wartość największą równą 50 w punktach -11, 1 i 9.

439. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{x}{99}-\frac{10\cdot\ln(x^2+1)}{99}+\operatorname{arctg} x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale $[9,\,11]$.

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=\frac{1}{99}-\frac{10\cdot 2x}{99\cdot(x^2+1)}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{99\cdot(x^2+1)}-\frac{20x}{99\cdot(x^2+1)}+\frac{99}{99\cdot(x^2+1)}=$$
$$=\frac{x^2-20x+100}{99\cdot(x^2+1)}=\frac{(x-10)^2}{99\cdot(x^2+1)}\geqslant 0\,,$$

przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=10$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 9, a największą na końcu, czyli w punkcie 11.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(9)=\frac{1}{11}-\frac{10\cdot\ln 82}{99}+\operatorname{arctg}9\approx\mathbf{1{,}10592}5\,,$$
$$f(10)=\frac{10}{99}-\frac{10\cdot\ln 101}{99}+\operatorname{arctg}10\approx\mathbf{1{,}10596}4\,,$$
$$f(11)=\frac{1}{9}-\frac{10\cdot\ln 122}{99}+\operatorname{arctg}11\approx\mathbf{1{,}10599}3\,.$$

440. Wyznaczyć punkty, w których funkcja f zdefiniowana wzorem

$$f(x)=\frac{9}{x}-\frac{81}{8x^2}+\ln x$$

osiąga najmniejszą i największą wartość na przedziale [4, 5].

Rozwiązanie:

Różniczkujemy funkcję f i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy:

$$f'(x)=-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{81}{4x^3}=\frac{4x^2-36x+81}{4x^3}=\frac{(2x-9)^2}{4x^3}\geqslant 0\,,$$

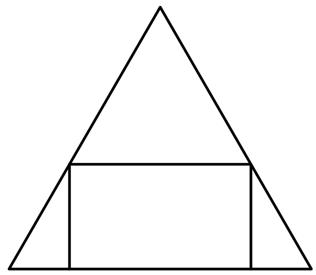
przy czym w ostatniej nierówności równość zachodzi tylko dla $x=9/2$. Ponieważ w interesującym nas przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia za wyjątkiem jednego punktu, w którym ma wartość zero, funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Odpowiedź: Funkcja f osiąga wartość najmniejszą na początku przedziału, czyli w punkcie 4, a największą na końcu, czyli w punkcie 5.

Uwaga: Na ogół w tego typu zadaniu nie badalibyśmy znaku pochodnej, a jedynie porównalibyśmy wartości funkcji na końcach przedziału i w miejscach zerowania się pochodnej. Jednak w tym wypadku jest to praktycznie niewykonalne bez użycia kalkulatora, mamy bowiem:

$$f(4)=\frac{207}{128}+\ln 4\approx 3,00348\,,$$
$$f(9/2)=\frac{3}{2}+\ln(9/2)\approx 3,00408\,,$$
$$f(5)=\frac{279}{200}+\ln 5\approx 3,00444\,.$$

441. W stożku o objętości 1 chcemy umieścić walec w taki sposób, że jedna z podstaw walca leży w płaszczyźnie podstawy stożka, a obwód drugiej podstawy walca leży na powierzchni bocznej stożka. Rysunek obok przedstawia widok z boku, ewentualnie przekrój płaszczyzną zawierającą wspólną oś obrotu stożka i walca. Jaką największą objętość może mieć walec?



Rozwiązanie:

Niech r będzie promieniem podstawy stożka, a h jego wysokością. Jeżeli walec ma wysokość $x\in(0,\,h)$, to jego podstawa ma promień $r\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)$, co ustalamy na podstawie prostych rozważań geometrycznych.

Wówczas objętość walca jest równa

$$V(x)=\pi\cdot x\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0^+}V(x)=\lim_{x\to h^-}V(x)=0\,,$$

a ponadto

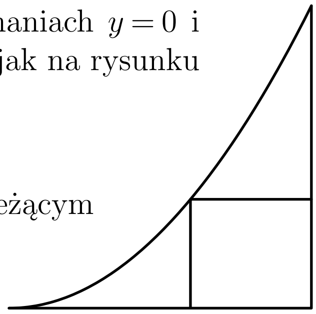
$$V'(x)=\pi\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)^2-\frac{2\pi\cdot x\cdot r^2}{h}\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)=\left(1-\frac{x}{h}-\frac{2x}{h}\right)\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)=$$
$$=\left(1-\frac{3x}{h}\right)\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{x}{h}\right)\,.$$

Wobec tego $V'(x)=0$ dla $x=h/3$, co prowadzi do maksymalnej objętości walca równej

$$V(h/3)=\pi\cdot\frac{h}{3}\cdot r^2\cdot\left(1-\frac{h/3}{h}\right)^2=\frac{\pi\cdot h\cdot r^2}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy z podanego w treści zadania założenia, że stożek ma objętość $1=\pi r^2h/3$.

Odpowiedź: Największa możliwa objętość walca wynosi 4/9.



442. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz parabolą o równaniu $y=x^2$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?

Rozwiązanie:

Niech $(a,\, a^2)$, gdzie $a\in(0,\,1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na paraboli.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a)=(1-a)\cdot a^2=a^2-a^3\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a\to 0^+} P(a)=\lim_{a\to 1^-} P(a)=0\,,$$

a ponadto

$$P'(a)=2a-3a^2\,.$$

Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=2/3$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej

$$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}\,.$$

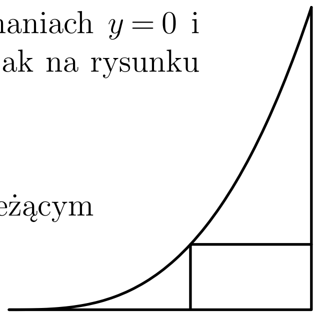
Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi 4/27.

Uwaga: Używając odpowiedniej wersji[1] nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną można uniknąć różniczkowania.

Mamy bowiem

$$P(a)\ =\ (1-a)\cdot a^2\ =\ 4\ \cdot\ (\mathbf{1-a})\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\,,$$

gdzie otrzymaliśmy iloczyn trzech czynników dodatnich o stałej sumie równej 1, a taki iloczyn jest największy, gdy wszystkie trzy czynniki są równe, czyli równe 1/3.



443. W trójkąt krzywoliniowy ograniczony prostymi o równaniach $y=0$ i $x=1$ oraz krzywą o równaniu $y=x^3$ chcemy wpisać prostokąt jak na rysunku obok. Jakie największe pole może mieć taki prostokąt?

Rozwiązanie:

Niech $(a,\, a^3)$, gdzie $a\in(0,\,1)$, będzie wierzchołkiem prostokąta leżącym na krzywej.

Wówczas pole prostokąta jest równe

$$P(a)=(1-a)\cdot a^3=a^3-a^4\,.$$

Zauważmy, że

$$\lim_{a\to 0^+} P(a)=\lim_{a\to 1^-} P(a)=0\,,$$

[1] $xyz\leqslant\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3}$

a ponadto
$$P'(a)=3a^2-4a^3 .$$
Wobec tego $P'(a)=0$ dla $a=3/4$, co prowadzi do maksymalnej wartości pola prostokąta równej
$$P\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{64}=\frac{27}{256} .$$

Odpowiedź: Największe możliwe pole prostokąta wynosi 27/256.

444. Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^2+12}$. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność
$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{|x-y|}{C} ,$$
gdzie $C=6$ **(wersja trudniejsza)** lub $C=3$ **(wersja łatwiejsza).**

Rozwiązanie:

Rozwiązanie wersji łatwiejszej:

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia
$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2+b^2\right) ,$$
który przy założeniu $a+b\neq 0$ można zapisać w postaci
$$a-b=\frac{a^4-b^4}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)} .$$
Przyjmując $a=\sqrt[4]{x^2+12}$ oraz $b=\sqrt[4]{y^2+12}$, zauważamy, że $a+b>0$ i przekształcamy lewą stronę dowodzonej nierówności:
$$|f(x)-f(y)|=\left|\sqrt[4]{x^2+12}-\sqrt[4]{y^2+12}\right|=\left|\frac{(x^2+12)-(y^2+12)}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}\right|=$$
$$=\frac{|x^2-y^2|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}=$$
$$=\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)} .$$

Korzystając z nierówności trójkąta i wykorzystując równość $|x|=\sqrt{x^2}$ otrzymujemy:
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}<\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12} ,$$
skąd
$$\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}}<1 .$$

Ponadto zauważamy, że
$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[4]{0+12}+\sqrt[4]{0+12}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{12}} .$$

Wykorzystanie tych nierówności pozwala dokończyć oszacowania:

$$\frac{|x-y|\cdot|x+y|}{\left(\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}\right)}=$$

$$=|x-y|\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+12}+\sqrt[4]{y^2+12}}\cdot\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{y^2+12}}\leqslant$$

$$\leqslant|x-y|\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{12}}\cdot 1=\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{16\cdot 12}}\leqslant\frac{|x-y|}{\sqrt[4]{9\cdot 9}}=\frac{|x-y|}{3}\,.$$

Rozwiązanie wersji trudniejszej:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Przyjmując[2]

$$g(x)=f'(x)=\frac{x}{2\cdot(x^2+12)^{3/4}}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2\cdot(x^2+12)^{3/4}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{-1/2}}{2\cdot(1+12\cdot x^{-2})^{3/4}}=0\,.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x)=\frac{1}{2\cdot(x^2+12)^{3/4}}-\frac{3x^2}{4\cdot(x^2+12)^{7/4}}\,.$$

Rozwiązujemy równanie na zerowanie się tej pochodnej:

$$\frac{1}{2\cdot(x^2+12)^{3/4}}=\frac{3x^2}{4\cdot(x^2+12)^{7/4}}\,,$$

$$2\cdot\left(x^2+12\right)=3x^2\,,$$

$$2\cdot 12=x^2\,,$$

$$x=\pm 2\cdot\sqrt{6}\,.$$

Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g\left(\pm 2\cdot\sqrt{6}\right)=\frac{\pm 2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\left(\left(\pm 2\cdot\sqrt{6}\right)^2+12\right)^{3/4}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 36^{3/4}}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 6^{3/2}}=\pm\frac{1}{6}\,.$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio $-1/6$ i $1/6$, skąd $|g(x)|\leqslant 1/6$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

[2] W celu uniknięcia pojęcia pochodnej drugiego rzędu, gdyż to pojęcie nie pojawiło się jeszcze na wykładzie.

445. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in(2,4)$ zachodzi nierówność $\sqrt[x]{x}>\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Niech $f(x)=\sqrt[x]{x}$.

Wówczas

$$f'(x)=\sqrt[x]{x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}\,.$$

Zatem $f'(x)>0$ dla $x<e$ oraz $f'(x)<0$ dla $x>e$.

Wobec tego funkcja f jest rosnąca w przedziale $[2,e]$ i malejąca w przedziale $[e,4]$, a ponieważ $f(2)=f(4)=\sqrt{2}$, otrzymujemy $\sqrt[x]{x}>\sqrt{2}$ dla $x\in(2,4)$.

446. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x)=5\sin x-\sin 5x\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f jest okresowa z okresem 2π i różniczkowalna, wystarczy porównać wartości funkcji w miejscach zerowych pochodnej znajdujących się w przedziale $[0,2\pi)$.

Skoro

$$f'(x)=5\cos x-5\cos 5x\,,$$

równanie $f'(x)=0$ jest równoważne równaniu

$$\cos x=\cos 5x\,.$$

Ponieważ równość

$$\cos x=\cos y$$

jest równoważna istnieniu liczby całkowitej k i znaku $\pm$ takich, że

$$y=2k\pi\pm x\,,$$

otrzymujemy równanie

$$5x=2k\pi\pm x\,,$$

czyli

$$(5\mp 1)\cdot x=2k\pi\,.$$

Wobec tego

$$x=\frac{k\pi}{2}\qquad\text{lub}\qquad x=\frac{k\pi}{3}\,,$$

co w połączeniu z warunkiem $x\in[0,2\pi)$ prowadzi do ośmiu miejsc zerowych pochodnej w jednym okresie.

Sprawdzając wartości funkcji f w tych ośmiu punktach otrzymujemy:

$$f(0)=0\,,\quad f(\pi/3)=3\sqrt{3}\,,\quad f(\pi/2)=4\,,\quad f(2\pi/3)=3\sqrt{3}\,,$$
$$f(\pi)=0\,,\quad f(4\pi/3)=-3\sqrt{3}\,,\quad f(3\pi/2)=-4\,,\quad f(5\pi/3)=-3\sqrt{3}\,.$$

Odpowiedź: Największa wartość funkcji f jest równa $3\sqrt{3}$.

447. Niech $f(x)=4\cos x+\sin 4x$. Podać wszystkie miejsca zerowe pochodnej funkcji f w przedziale $[0, 2\pi)$.

Odpowiedź:

$$\frac{\pi}{10}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{9\pi}{10}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{13\pi}{10}, \quad \frac{17\pi}{10}, \quad \frac{11\pi}{6}.$$

448. Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 13 \qquad \text{czy} \qquad 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10\ ?$$

Wskazówka 1: Podane liczby są większe od 25, a różnią się o mniej niż 0,02 — nie próbuj bezpośredniego szacowania.

Wskazówka 2: Zbadaj funkcję pomocniczą $f(x)=16\operatorname{arctg}x-\ln\left(x^2+1\right)$.

Rozwiązanie:

Różniczkując podaną we wskazówce funkcję pomocniczą otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{16}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2(8-x)}{x^2+1}>0$$

dla $x<8$. Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 8]$. W szczególności $f(7)<f(8)$, skąd dostajemy kolejno:

$$16\cdot\operatorname{arctg}7-\ln 50 \ < \ 16\cdot\operatorname{arctg}8-\ln 65\,,$$
$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 65 \ < \ 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 50\,,$$
$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 13+\ln 5 \ < \ 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10+\ln 5\,,$$
$$16\cdot\operatorname{arctg}7+\ln 13 \ < \ 16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10\,.$$

Odpowiedź: Większa jest liczba $16\cdot\operatorname{arctg}8+\ln 10$.

W każdym z 10 poniższych zadań podaj największą wartość funkcji f na przedziale $[0, \infty)$. Odpowiedzi podaj w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

449. $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$ **3/8**

450. $f(x)=4\sqrt{x}-x^2$ **3**

451. $f(x)=32\sqrt{x}-x^2$ **48**

452. $f(x)=4\sqrt{x}-27x^2$ **1**

453. $f(x)=32\sqrt{x}-27x^2$ **16**

454. $f(x)=4\sqrt{x}-125x^2$ **3/5**

455. $f(x)=6\sqrt{x}-x^3$ **5**

456. $f(x)=3\sqrt{x}-16x^3$ **5/4**

457. $f(x)=8\sqrt{x}-x^4$ **7**

458. $f(x)=\sqrt{x}-16x^4$ **7/16**

459. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Funkcja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f, tzn. $f(g(x))=g(f(x))=x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Podać wzór na pochodną funkcji g. Podać przykład takiej liczby wymiernej $x>1$, że liczba $g'(x)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Sposób I:

Równość $g(x)=y$ jest równoważna równości $f(y)=x$, czyli

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

lub inaczej

$$x=\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\,, \qquad (\clubsuit)$$

jeśli przyjmiemy $t=e^y$. Przy tych oznaczeniach mamy $t>0$ i $y=\ln t$. Rozwiązujemy równanie ($\clubsuit$) tak, aby wyznaczyć t w zależności od x:

$$2xt=t^2-1\,,$$

$$t^2-2xt-1=0\,,$$

$$t=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}\,,$$

$$t=x\pm\sqrt{x^2+1}\,,$$

skąd wobec $t>0$ musimy przyjąć "$\pm$" = "$+$". Ostatecznie

$$t=x+\sqrt{x^2+1}$$

i w konsekwencji

$$g(x)=y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,.$$

Mając jawny wzór określający funkcję g bez trudu obliczamy jej pochodną:

$$g'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=4/3$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x)=g'(4/3)=\frac{1}{\sqrt{16/9+1}}=\frac{1}{\sqrt{25/9}}=\frac{3}{5}\,.$$

Sposób II:

Zauważmy, że

$$f'(y)=\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\sqrt{\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}}=\sqrt{\frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}+1}=\sqrt{\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2+1}=$$

$$=\sqrt{(f(y))^2+1}\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{\sqrt{(f(g(x)))^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

W powyższych przekształceniach wykorzystaliśmy równość

$$f'(y)=\sqrt{(f(y))^2+1}$$

dla $y=g(x)$.

Dla urozmaicenia tym razem jako przykład liczby wymiernej $x>1$, dla której $g'(x)$ jest liczbą wymierną, przyjmijmy $x=12/5$. Otrzymujemy wtedy

$$g'(x)=g'(12/5)=\frac{1}{\sqrt{144/25+1}}=\frac{1}{\sqrt{169/25}}=\frac{5}{13}\,.$$

460. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^5+x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(34)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x)=5x^4+1\,.$$

Zauważmy też, że

$$g(0)=0,\qquad g(1)=2\qquad \text{oraz}\qquad g(2)=34\,,$$

skąd odpowiednio

$$f(0)=0,\qquad f(2)=1\qquad \text{oraz}\qquad f(34)=2\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}\,,$$

co po podstawieniu kolejno $x=0$, $x=2$ i $x=34$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0)=\frac{1}{g'(f(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{5\cdot 0^4+1}=\frac{1}{1}=1\,,$$

$$f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{5\cdot 1^4+1}=\frac{1}{6}$$

i

$$f'(34)=\frac{1}{g'(f(34))}=\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{5\cdot 2^4+1}=\frac{1}{81}\,.$$

Odpowiedź:

$$f'(0)=1,\qquad f'(2)=\frac{1}{6}\qquad \text{oraz}\qquad f'(34)=\frac{1}{81}\,.$$

461. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją odwrotną do funkcji $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefinowanej wzorem $g(x)=x^3+9x$. Obliczyć $f'(0)$, $f'(10)$ i $f'(100)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że pochodna funkcji g dana jest wzorem

$$g'(x)=3x^2+9\,.$$

Zauważmy też, że

$$g(0)=0, \quad g(1)=10 \quad \text{oraz} \quad g(4)=100\,,$$

skąd odpowiednio

$$f(0)=0, \quad f(10)=1 \quad \text{oraz} \quad f(100)=4\,.$$

Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}\,,$$

co po podstawieniu kolejno $x=0$, $x=10$ i $x=100$ prowadzi odpowiednio do

$$f'(0)=\frac{1}{g'(f(0))}=\frac{1}{g'(0)}=\frac{1}{3\cdot 0^2+9}=\frac{1}{9}\,,$$

$$f'(10)=\frac{1}{g'(f(10))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{3\cdot 1^2+9}=\frac{1}{12}$$

i

$$f'(100)=\frac{1}{g'(f(100))}=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{3\cdot 4^2+9}=\frac{1}{57}\,.$$

Odpowiedź:

$$f'(0)=\frac{1}{9}, \quad f'(10)=\frac{1}{12} \quad \text{oraz} \quad f'(100)=\frac{1}{57}\,.$$

W każdym z kolejnych 7 zadań funkcja $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określonej podanym wzorem. W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji g_i w trzech podanych punktach.

462. $f_1(x)=x^3+x$ $\quad g_1'(0)=\mathbf{1}$ $\quad g_1'(2)=\mathbf{1/4}$ $\quad g_1'(130)=\mathbf{1/76}$

463. $f_2(x)=x^7+x$ $\quad g_2'(0)=\mathbf{1}$ $\quad g_2'(2)=\mathbf{1/8}$ $\quad g_2'(130)=\mathbf{1/449}$

464. $f_3(x)=x^3+5x$ $\quad g_3'(0)=\mathbf{1/5}$ $\quad g_3'(6)=\mathbf{1/8}$ $\quad g_3'(42)=\mathbf{1/32}$

465. $f_4(x)=x^5+5x$ $\quad g_4'(0)=\mathbf{1/5}$ $\quad g_4'(6)=\mathbf{1/10}$ $\quad g_4'(42)=\mathbf{1/85}$

466. $f_5(x)=x^3+2x$ $g_5'(3)=\mathbf{1/5}$ $g_5'(12)=\mathbf{1/14}$ $g_5'(72)=\mathbf{1/50}$

467. $f_6(x)=x^3+4x$ $g_6'(5)=\mathbf{1/7}$ $g_6'(16)=\mathbf{1/16}$ $g_6'(80)=\mathbf{1/52}$

468. $f_7(x)=2x^3+x$ $g_7'(3)=\mathbf{1/7}$ $g_7'(18)=\mathbf{1/25}$ $g_7'(57)=\mathbf{1/55}$

W każdym z kolejnych 5 zadań dla podanej funkcji $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcja $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f_i(g_i(x))=x^3+3x\,.$$

W każdym z tych zadań podaj **w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego** wartości pochodnej funkcji f_i w trzech podanych punktach.

469. $g_1(x)=x^3+x+6$ $f_1'(8)=\mathbf{3/2}$ $f_1'(16)=\mathbf{15/13}$ $f_1'(36)=\mathbf{15/14}$

470. $g_2(x)=x^3+2x+3$ $f_2'(6)=\mathbf{6/5}$ $f_2'(15)=\mathbf{15/14}$ $f_2'(36)=\mathbf{30/29}$

471. $g_3(x)=2x^3+x$ $f_3'(3)=\mathbf{6/7}$ $f_3'(18)=\mathbf{3/5}$ $f_3'(57)=\mathbf{6/11}$

472. $g_4(x)=x^5+x+2$ $f_4'(2)=\mathbf{3}$ $f_4'(4)=\mathbf{1}$ $f_4'(36)=\mathbf{5/27}$

473. $g_5(x)=x^5+2x$ $f_5'(0)=\mathbf{3/2}$ $f_5'(3)=\mathbf{6/7}$ $f_5'(36)=\mathbf{15/82}$

474. Funkcja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$

Funkcja g jest złożeniem 2020 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{e}\right)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right).$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$e^y=\frac{e^x+1}{e^x-1}\,,$$

$$e^x\cdot e^y-e^y=e^x+1\,,$$

$$e^x\cdot e^y-e^x-e^y=1\,.$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y, krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x=y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x))=x$ dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej x. W konsekwencji $g(x)=x$ dla $x>0$ i $g'(x)=1$. W szczególności $g'\left(\sqrt{e}\right)=1$ jest liczbą wymierną.

475. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}-\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}-1\right)$$

na przedziale $[10, 50]$ i określić, w których punktach te wartości są przyjmowane. Doprowadzić wartości najmniejszą i największą do tak prostej postaci, aby było widać, czy są to liczby wymierne, czy niewymierne.

Wskazówka: $f=g\circ h$, gdzie

$$g(t)=\operatorname{arctg}(t-1)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

oraz

$$h(x)=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\,.$$

Rozwiązanie:

Funkcja $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ określona wzorem

$$g(t)=\operatorname{arctg}(t-1)+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{t}-1\right)$$

ma pochodną

$$g'(t)=\frac{1}{(t-1)^2+1}+\frac{-2/t^2}{\left(\frac{2}{t}-1\right)^2+1}=\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{2}{(2-t)^2+t^2}=$$

$$=\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{2}{4-4t+2t^2}=\frac{1}{t^2-2t+2}-\frac{1}{2-2t+t^2}=0\,,$$

jest więc stała. Ponieważ

$$g(1)=\operatorname{arctg}0+\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}\,,$$

mamy $g(t)=\pi/4$ dla każdego $t\in(0,+\infty)$.

Pozostaje zauważyć, że przyjmując

$$t=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}+\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}$$

otrzymujemy

$$\frac{2}{t}=\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}+1}-\sqrt{e^{e^{x^{2020}}}-1}\,,$$

skąd

$$f(x)=g(t)=\frac{\pi}{4}\,.$$

Zatem f jest funkcją stałą równą $\pi/4$. W konsekwencji przyjmuje ona na całym rozważanym przedziale $[10,50]$ największą (a zarazem najmniejszą) wartość $\pi/4$ (niewymierną, bo π jest niewymierne).

476. Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, jest określona wzorem

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}\,.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji f jest krzywa o równaniu

$$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

Przekształcanie tego równania prowadzi kolejno do równań równoważnych

$$y^3=\frac{x^3}{x^3-1}\,,$$

$$x^3y^3-y^3=x^3\,,$$

$$x^3y^3=x^3+y^3\,.$$

Ponieważ ostatnie równanie nie zmienia się przy zamianie x i y, krzywa opisana tym równaniem jest symetryczna względem prostej o równaniu $x=y$. To oznacza, że funkcja f jest odwrotna sama do siebie, czyli $f(f(x))=x$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 1$. W konsekwencji $g(x)=x$ dla $x\neq 1$, wobec czego $g'(x)=1$. W szczególności $g'\left(\sqrt{2}\right)=1$ jest liczbą wymierną.

477. Funkcja $f:Z\to Z$, gdzie $Z=\mathbb{R}\setminus\{0,\,1\}$, jest określona wzorem

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}\,.$$

Funkcja g jest złożeniem 666 egzemplarzy funkcji f:

$$g(x)=f(f(f(\ldots f(f(x))\ldots)))\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba $g'\left(\sqrt{2}\right)$ jest wymierna.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}\,,$$

skąd

$$f(f(x))=\sqrt[3]{1-\frac{1}{\left(f(x)\right)^3}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x^3}}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{\frac{x^3-1}{x^3}}}=\sqrt[3]{1-\frac{x^3}{x^3-1}}=\sqrt[3]{\frac{-1}{x^3-1}}$$

oraz

$$f(f(f(x)))=\sqrt[3]{1-\frac{1}{\left(f(f(x))\right)^3}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{\frac{-1}{x^3-1}}}=\sqrt[3]{1+x^3-1}=\sqrt[3]{x^3}=x\,.$$

Z otrzymanej równości $f(f(f(x)))=x$ wynika $g(x)=x$ dla $x\in Z$, co daje $g'(x)=1$. W szczególności $g'\left(\sqrt{2}\right)=1$ jest liczbą wymierną.

478. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-2x^2-2x-1}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{2h}-2h^2-2h-1}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}-2h^2-2h-1-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{2h}-4h-2-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4e^{2h}-4-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{8e^{2h}-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{8-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=4/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{16e^{2h}}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=4/3$ i wówczas $f'(0)=2/3$.

479. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\cos h}{e^h-1-h}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h-Ae^h+A+Ah}{he^h-h-h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-Ae^h+A}{e^h+he^h-1-2h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-Ae^h}{2e^h+he^h-2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h-e^h}{3e^h+he^h}=-\frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=-1/3$.

480. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{dla } x\neq 0\\ A & \text{dla } x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{3h}-e^{2h}-\ln(1+h)}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{3h}-e^{2h}-\ln(1+h)-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{3e^{3h}-2e^{2h}-\frac{1}{1+h}-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{9e^{3h}-4e^{2h}+\frac{1}{(1+h)^2}-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{6-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=3$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{27e^{3h}-8e^{2h}-\frac{2}{(1+h)^3}}{6}=\frac{17}{6}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=3$ i wówczas $f'(0)=17/6$.

481. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x^3} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2he^{-h}-\ln(1+2h)}{h^3}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2he^{-h}-\ln(1+2h)-Ah^3}{h^4}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{2e^{-h}-2he^{-h}-\frac{2}{1+2h}-3Ah^2}{4h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-4e^{-h}+2he^{-h}+\frac{4}{(1+2h)^2}-6Ah}{12h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{6e^{-h}-2he^{-h}-\frac{16}{(1+2h)^3}-6A}{24h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{-10-6A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=-5/3$. Wówczas możemy po raz czwarty zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{-8e^{-h}+2he^{-h}+\frac{96}{(1+2h)^4}}{24}=\frac{-8+96}{24}=\frac{88}{24}=\frac{11}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=-5/3$ i wówczas $f'(0)=11/3$.

482. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-\sqrt{1+x}}{\ln(1+x)} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-\sqrt{1+h}}{\ln(1+h)}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\sqrt{1+h}-A\cdot\ln(1+h)}{h\cdot\ln(1+h)}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+h}}-\frac{A}{1+h}}{\ln(1+h)+\frac{h}{1+h}}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{1/2-A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1/2$. Wówczas możemy po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h+\frac{1}{4\cdot(1+h)^{3/2}}+\frac{1/2}{(1+h)^2}}{\frac{1}{1+h}+\frac{1}{(1+h)^2}}=\frac{7}{8}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1/2$ i wówczas $f'(0)=7/8$.

483. Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{e^x}-e^{x+1}}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0\\ A & \text{dla} \quad x=0\end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{e^h}-e^{h+1}}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}-e^{h+1}-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{e-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=e/2$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{e^h}\cdot e^{3h}+2\cdot e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^{2h}+e^{e^h}\cdot e^h-e^{h+1}}{6}=\frac{4e}{6}=\frac{2e}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=e/2$ i wówczas $f'(0)=2e/3$.