377. Dobrać odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C i udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$C \leqslant \frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8} \leqslant 6\cdot C\,.$$

Rozwiązanie:

W przypadku, gdy $x \geqslant 1$, wykonujemy następujące szacowania:

$$\frac{4}{7}=\frac{8}{14}=\frac{8x+0}{5x+x+8x}\leqslant\frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8}\leqslant\frac{8x+7x}{5x+0+0}=\frac{15}{5}=3\,.$$

Natomiast w przypadku, gdy $0<x<1$, oszacowania wyglądają następująco:

$$\frac{1}{2}=\frac{7}{14}=\frac{0+7}{5+1+8}\leqslant\frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8}\leqslant\frac{8+7}{0+0+8}=\frac{15}{8}\,.$$

Zauważamy, że

$$\frac{1}{2}<\frac{4}{7} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{15}{8}<3\,.$$

Zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej x zachodzą nierówności

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{8x+7}{5x+\sqrt{x}+8}\leqslant 3\,,$$

można więc przyjąć $C=1/2$.

378. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}\,.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+x^3+x^2=x^4+x^3+\frac{x^2}{4}+\frac{3\cdot x^2}{4}=\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3\cdot x^2}{4}\geqslant 0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyzanaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{4}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+x^3+x^2}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+x^3+x^2)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+x^3+x^2}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{x^2}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+x^3+x^2}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+x^3+x^2}}{\sqrt{x^4}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^{-1}}{\left(-\sqrt[4]{1+x^{-1}+x^{-2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+1\right)}=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{4}\,.$$

Tyma razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+\frac{1}{4}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-\frac{1}{4}$.

379. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}$.
Uwaga: Treść zadania jest poprawna - pod pierwiastkiem niczego nie brakuje - ma być tak jak jest napisane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^4+4x^3+6x^2+1=x^4+4x^3+4x^2+2x^2+1=\left(x^2+2x\right)^2+2x^2+1>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{x^4+4x^3+6x^2+1}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=1\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+4x^3+6x^2+1)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+6x^2+1}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\sqrt[4]{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)}=$$

$$=\frac{4}{(1+1)\cdot(1+1)}=1\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^4-t^4}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[4]{x^4}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{-\sqrt[4]{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{\frac{x^4+4x^3+6x^2+1}{x^4}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)=-1\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}+x\right)=$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^4+4x^3+6x^2+1)-x^4}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3+6x^2+1}{\left(\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}+x^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}}{x^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}}{-\sqrt[4]{x^4}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^4+4x^3+6x^2+1}}{\sqrt{x^4}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4+6x^{-1}+x^{-3}}{\left(-\sqrt[4]{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+4x^{-1}+6x^{-2}+x^{-4}}+1\right)} =$$

$$= \frac{4}{(-1-1)\cdot(1+1)} = -1\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t = \frac{s^4-t^4}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)}$$

przy $s=\sqrt[4]{x^4+4x^3+6x^2+1}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=x+1$, natomiast w $-\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=-x-1$.

380. Wyznaczyć asymptoty funkcji f określonej wzorem $f(x)=x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$x^8+x^7+x^6+7=\left(x^4+\frac{x^3}{2}\right)^2+\frac{3x^6}{4}+7>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest określona na całej prostej rzeczywistej. Ponieważ funkcja f jest ciągła, nie ma ona asymptot pionowych.

Przystępujemy więc do próby wyznaczenia asymptot ukośnych/poziomych.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}=1+1=2\,.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}+x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=\frac{1}{8}\,.$$

W powyższych rachunkach skorzystaliśmy ze wzoru

$$s-t=\frac{s^8-t^8}{(s+t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}\,.$$

Wyznaczając asymptotę przy $x\to-\infty$ pamiętamy, że w tym przypadku należy przyjąć założenie $x<0$, a w konsekwencji $x=-|x|=-\sqrt[8]{x^8}$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{\frac{x^8+x^7+x^6+7}{x^8}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}\right)=1-1=0\,.$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^8+x^7+x^6+7)-x^8}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7+x^6+7}{\left(\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}-x\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}+x^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}+x^4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{x^2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{x^4}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(\frac{\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}}{-\sqrt[8]{x^8}}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt[4]{x^8}}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^8+x^7+x^6+7}}{\sqrt{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^7}}{\left(-\sqrt[8]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}-1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^8}}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{(-1-1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)}=-\frac{1}{8}\,.$$

Tym razem skorzystaliśmy ze wzoru

$$s+t=\frac{s^8-t^8}{(s-t)\cdot(s^2+t^2)\cdot(s^4+t^4)}$$

przy $s=\sqrt[8]{x^8+x^7+x^6+7}>0$ i $t=x<0$, a więc w sytuacji, gdy $s-t$ jest dodatnie, a w konsekwencji różne od zera.

Odpowiedź: Dana funkcja ma w $+\infty$ asymptotę ukośną o równaniu $y=2x+\frac{1}{8}$, natomiast w $-\infty$ asymptotę poziomą o równaniu $y=-\frac{1}{8}$.

381. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,.$$

Dowieść, że f jest odwrotna do samej siebie.

Rozwiązanie:

Wykres funkcji f jest krzywą o równaniu

$$y=-\frac{25x}{24}+\frac{\sqrt{49x^2+37}}{24}\,,$$

czyli

$$24y+25x=\sqrt{49x^2+37}\,.$$

Z powyższego rówania wynika

$$24y+24x=\sqrt{49x^2+37}-x\geqslant\sqrt{49x^2+37}-|x|=\sqrt{49x^2+37}-\sqrt{x^2}>0\,,$$

a z podobnego równania

$$24y+25x=-\sqrt{49x^2+37}$$

dochodzimy do

$$24y+24x=-\sqrt{49x^2+37}-x\leqslant-\sqrt{49x^2+37}+|x|=-\sqrt{49x^2+37}+\sqrt{x^2}<0\,.$$

Zatem równanie wykresu funkcji f można podnieść do kwadratu uzupełniając je nierównością $x+y>0$. Otrzymujemy kolejno

$$576y^2+1200xy+625x^2=49x^2+37, \qquad x+y>0$$

$$576y^2+1200xy+576x^2=37, \qquad x+y>0$$

Z uwagi na symetrię występowania x oraz y w powyższym warunku, wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x=y$, co oznacza, że funkcja f jest funkcją odwrotną do samej siebie.