Zadania do omówienia na ćwiczeniach
w poniedziałek 11.10.2021 i wtorek 12.10.2021.
Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami !!!

Oznaczenia:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot a_{m+3} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Obliczyć wartości wyrażeń:

1. $\sum\limits_{i=3}^{5} i^2$ **2.** $\sum\limits_{i=-99}^{100} i^3$ **3.** $\sum\limits_{i=-10}^{10} 7$ **4.** $\sum\limits_{i=1}^{100} i$ **5.** $\sum\limits_{i=1}^{24} i^2$ **6.** $\prod\limits_{i=1}^{6} i$ **7.** $\prod\limits_{i=-2020}^{2020} i^{2020}$

8. Wyznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których prawdziwa jest podana implikacja:

a) $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 2$ **b)** $x < 1 \Rightarrow x^2 > 0$ **c)** $x < 1 \Rightarrow x^2 < 0$ **d)** $x^5 > 32 \Rightarrow x^6 > 64$

e) $x^6 > 64 \Rightarrow x^7 > 128$ **f)** $x^5 < 32 \Rightarrow x^6 < 64$ **g)** $x^6 < 64 \Rightarrow x^7 < 128$

Oszustwo **9.** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110\,. \qquad (*)$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1) < 2^{n+1} + 110$. Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \geqslant 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \geqslant 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n = 2$ mamy $60 < 4 + 110 = 114$,

dla $n = 3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$,

dla $n = 4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.

W szczególności wykazaliśmy, że dla $n = 6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Gdzie tkwi błąd w powyższym rozumowaniu?

10. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ zachodzi równość
$$\binom{4}{4}+\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{5}.$$

11. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi równość
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+\frac{5}{651}+\frac{6}{1333}+\ldots+\frac{n-1}{(n-1)^4+(n-1)^2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(n^2-n+1)}.$$

12. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych $k<n$ spełniających równanie
$$k\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k+1}.$$

13. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4<\frac{n^2\cdot(n+1)^2\cdot(2n+1)}{10}.$$

14. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$(n+1)\cdot\binom{2n}{n}\geqslant 4^n.$$

15. W miejsce kropek wstawić jeden ze znaków $\geqslant$, $\leqslant$, a następnie dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$(n+2)\cdot\binom{2n}{n}\ldots\ldots\ldots 3\cdot 2^{2n-1}.$$

16. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$(n+3)\cdot\binom{2n}{n}>7\cdot 4^{n-1}.$$

17. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$(n+4)\cdot\binom{2n}{n}>2^{2n+1}.$$

18. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$n\cdot\binom{2n}{n}^2\geqslant 4^{2n-1}.$$

19. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n+2}{n} \leqslant 4^n .$$

20. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n+2}{n} > \left(\frac{15}{4}\right)^n .$$

21. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\sqrt[n]{25}\cdot\binom{5n}{n}\cdot\binom{4n}{2n} < \sqrt[n]{27}\cdot\binom{5n}{2n}\cdot\binom{3n}{n} .$$

22. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$2^{65}\cdot n \leqslant 2^n + 2^{71} .$$

23. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$2^{2n}\cdot\binom{2n}{n} > \binom{4n}{2n} .$$

24. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$3^{28}\cdot n \leqslant 3^n + 3^{31} .$$

25. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$n\cdot\binom{6n}{2n}\cdot\binom{4n}{n} < (n+1)\cdot\binom{6n}{3n}\cdot\binom{3n}{n} .$$

26. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \geqslant \frac{3^{n-1}}{2} .$$

27. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność
$$\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{15n+4} < 9\cdot 4^{n-1} .$$