KOLOKWIUM nr 5, 17.01.2022, godz. 10:15–11:45

Zadanie **12.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=x^2-6\cdot|x-1|$$

na przedziale $[-4,4]$ oraz podać, w których punktach te wartości są osiągane.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{dla} \quad x\in[1,+\infty) \\ -x+1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,1) \end{cases}$$

a zatem wzór na funkcję f możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x+6 & \text{dla} \quad x\in[1,4] \\ x^2+6x-6 & \text{dla} \quad x\in[-4,1) \end{cases}$$

W konsekwencji pochodna funkcji f wewnątrz przedziału $[-4,4]$ jest dana wzorem

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-6 & \text{dla} \quad x\in(1,4) \\ 2x+6 & \text{dla} \quad x\in(-4,1) \end{cases}$$

W punkcie 1 pochodna może nie istnieć, jednak nie ma potrzeby rozstrzygać jej istnienia – wystarczy dołączyć ten punkt do listy punktów, w których obliczymy wartość funkcji f.

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

1° W przypadku $x\in(1,4)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do równania $2x-6=0$, co ma rozwiązanie $x=3$, które należy do rozważanego przedziału $(1,4)$.

2° W przypadku $x\in(-4,1)$ równanie $f'(x)=0$ sprowadza się do $2x+6=0$, co ma rozwiązanie $x=-3$, które należy do rozważanego przedziału $(-4,1)$.

Porównamy wartości funkcji f w pięciu punktach:

- końce przedziału: -4 i 4,
- miejsca zerowe pochodnej: -3 i 3,
- punkt, w którym podejrzewamy, że pochodna nie istnieje: 1.

$$f(-4)=-14\,,$$
$$f(-3)=-15\,,$$
$$f(1)=1\,,$$
$$f(3)=-3\,,$$
$$f(4)=-2\,.$$

Odpowiedź: Dana funkcja na podanym przedziale osiąga wartość najmniejszą równą -15 w punkcie -3, a wartość największą równą 1 w punkcie 1.

Zadanie **13.** **(10 punktów)**
Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\cdot e^{3x}-3\cdot e^{2x}+1}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:
Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2\cdot e^{3h}-3\cdot e^{2h}+1}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot e^{3h}-3\cdot e^{2h}+1-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{6\cdot e^{3h}-6\cdot e^{2h}-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{18\cdot e^{3h}-12\cdot e^{2h}-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{6-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=3$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{54\cdot e^{3h}-24\cdot e^{2h}}{6}=\frac{30}{6}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=3$ i wówczas $f'(0)=5$.

Zadanie **14. (10 punktów)**
Niech
$$f(x)=\sqrt{x}-50\cdot\ln x\,.$$
Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:
$$f(40\,000)+f(40\,002)=-\mathbf{659{,}660973309607}...$$
czy
$$2\cdot f(40\,001)=-\mathbf{659{,}660973309607}...$$

Rozwiązanie:
Różniczkując funkcję f otrzymujemy
$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-\frac{50}{x}$$
oraz
$$f''(x)=-\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}+\frac{50}{x^2}=\frac{-\sqrt{x}+200}{4\cdot x^2}<0$$
dla $x>40000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $[40000,\infty)$. Zatem
$$\frac{f(x)+f(y)}{2}<f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$
czyli
$$f(x)+f(y)<2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych $x,y\in[40000,\infty)$.

W szczególności
$$f(40\,000)+f(40\,002)<2\cdot f(40\,001)\,.$$

Odpowiedź: Liczba $2\cdot f(40\,001)$ jest większa od $f(40\,000)+f(40\,002)$.

Zadanie **15. (10 punktów)**
Niech

$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}\,.$$

Rozstrzygnąć, czy liczba

$$f(3{,}01)=f(301/100)\approx \mathbf{2{,}003375}$$

jest mniejsza czy większa od

$$\frac{16027}{8000}=2+\frac{27}{8000}=\mathbf{2{,}003375}$$

Rozwiązanie:
Różniczkując funkcję f otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{3x^2}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{6x}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{30x\cdot\left(x^3+5\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}-\frac{36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=$$
$$\frac{30x^4+150x-36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{150x-6x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}=\frac{6x\cdot\left(25-x^3\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/5}}<0$$

dla $x>\sqrt[3]{25}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{25},\infty\right)$, zawierającym przedział $\left[\sqrt[3]{27},\infty\right)=[3,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>3$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=3$. Ponieważ $f(3)=2$ oraz $f'(3)=27/80$, dla $x>3$ zachodzi nierówność

$$f(x)<2+\frac{27\cdot(x-3)}{80}$$

i w konsekwencji

$$f(3{,}01)<2+\frac{27\cdot 0{,}01}{80}=2+\frac{27}{8000}\,.$$

Odpowiedź: Wartość $f(3{,}01)$ jest mniejsza od 16027/8000.