KOLOKWIUM nr 4, 10.01.2022, godz. 10:15–11:00

Zadanie **10. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą A, że funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x^2} & \text{dla} \quad x\neq 0 \\ A & \text{dla} \quad x=0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru A.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji pochodnej otrzymujemy

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^h-\sqrt{1+2h}}{h^2}-A}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\sqrt{1+2h}-Ah^2}{h^3}\,.$$

Przy $h\to 0$ w ostatniej granicy otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{1}{\sqrt{1+2h}}-2Ah}{3h^2}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$, możemy więc po raz drugi zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h+\frac{1}{(1+2h)^{3/2}}-2A}{6h}\,.$$

Przy $h\to 0$ otrzymujemy iloraz $\frac{2-2A}{0}$, co ma postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ dla $A=1$. Wówczas możemy po raz trzeci zastosować regułę de l'Hospitala.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-\frac{3}{(1+2h)^{5/2}}}{6}=\frac{1-3}{6}=-\frac{1}{3}\,.$$

Odpowiedź: Funkcja f jest różniczkowalna dla $A=1$ i wówczas $f'(0)=-1/3$.

Zadanie **11. (10 punktów)**

Dana jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ określona wzorem $f(x)=\ln(x^4+27)$. Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\,.$$

Rozwiązanie:

Pominąwszy trywialny przypadek $x=y$, z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika równość

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|\cdot|f'(c)|\,,$$

gdzie c leży pomiędzy x i y.

Wystarczy więc wykazać, że $|f'(x)|\leqslant 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Przyjmując

$$g(x)=f'(x)=\frac{4\cdot x^3}{x^4+27}$$

otrzymujemy

$$\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4\cdot x^3}{x^4+27}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4\cdot x^{-1}}{1+27\cdot x^{-4}}=0\,.$$

Zauważmy, że g jest różniczkowalna na całej prostej, a jej pochodna jest dana wzorem

$$g'(x)=\frac{12\cdot x^2\cdot(x^4+27)-4\cdot x^3\cdot 4\cdot x^3}{(x^4+27)^2}=\frac{-4\cdot x^6+12\cdot 27\cdot x^2}{(x^4+27)^2}=$$

$$=\frac{-4\cdot x^6+4\cdot 81\cdot x^2}{(x^4+27)^2}=\frac{4\cdot x^2\cdot(-x^4+81)}{(x^4+27)^2}\,.$$

Powyższa pochodna zeruje się dla $x=\pm3$. Wyliczamy wartość funkcji g w miejscach zerowych pochodnej:

$$g(\pm3)=\pm\frac{4\cdot 3^3}{3^4+27}=\pm\frac{4\cdot 27}{3\cdot 27+27}=\pm\frac{4}{3+1}=\pm1\,.$$

Stąd wynika, że funkcja g przyjmuje najmniejszą i największą wartość odpowiednio -1 i 1, a w konsekwencji $|g(x)|\leqslant 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x.