

**KOŁOKWIUM nr 3, 29.11.2021, godz. 10:15–11:00****Zadanie 5. (10 punktów)**

Wyzaczyć wszystkie takie **zbieżne** szeregi geometryczne  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach  **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \frac{20}{3}.$$

*Rozwiązanie:*

Założmy<sup>1</sup>, że  $a_n = cq^{n-1}$ , pamiętając, aby  $c > 0$  oraz  $0 < q < 1$ . Wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} cq^{n-1} = \frac{c}{1-q}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c^2 q (q^2)^{n-1} = \frac{c^2 q}{1-q^2},$$

co po uwzględnieniu warunków zadania oraz prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \frac{c}{1-q} = 20/3 \\ \frac{c^2 q}{1-q^2} = 20/3, \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} c = 20(1-q)/3 \\ c^2 q = 20(1-q^2)/3. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy

$$cq = 1 + q,$$

co po podstawieniu do pierwszego równania przemnożonego przez  $q$  daje kolejno

$$\begin{aligned} 1 + q &= 20q/3 - 20q^2/3, \\ 3 + 3q &= 20q - 20q^2, \\ 20q^2 - 17q + 3 &= 0, \\ q &= \frac{17 \pm 7}{40}, \end{aligned}$$

skąd

$$q = 3/5, \quad c = 8/3$$

lub

$$q = 1/4, \quad c = 5.$$

Otrzymane rozwiązania prowadzą odpowiednio do

$$a_n = cq^{n-1} = \frac{8 \cdot 3^{n-2}}{5^{n-1}} \quad \text{oraz} \quad a_n = cq^{n-1} = \frac{5}{4^{n-1}}.$$

**Odpowiedź:** Istnieją dwa szeregi spełniające warunki zadania:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot 3^{n-2}}{5^{n-1}} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^{n-1}}.$$

<sup>1</sup>Dla prostoty oznaczeń przyjmuję  $c = a_1$ , aby uniknąć indeksu "1" w rachunkach.

**Zadanie 6. (10 punktów)**

W każdym z zadań **6.1-6.10** podaj w postaci uproszczonej (tzn. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy  $-\infty$  albo  $+\infty = \infty$ .

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

---


$$\mathbf{6.1.} \quad A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 70} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad \inf A = -\mathbf{1/6} \qquad \sup A = \mathbf{1/11}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $A$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $A$  **TAK**

---


$$\mathbf{6.2.} \quad B = \left\{ \frac{1}{2^n - 70} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad \inf B = -\mathbf{1/6} \qquad \sup B = \mathbf{1/58}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $B$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $B$  **TAK**

---


$$\mathbf{6.3.} \quad C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 47n^2 \leq m^2 \leq 49n^2 \right\} \qquad \inf C = \sqrt{\mathbf{47}} \qquad \sup C = \mathbf{7}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $C$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $C$  **TAK**

---


$$\mathbf{6.4.} \quad D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25^n \leq 5^m \leq 29^n \right\} \qquad \inf D = \mathbf{2} \qquad \sup D = \log_5 \mathbf{29}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $D$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $D$  **NIE**

---


$$\mathbf{6.5.} \quad E = \left\{ \sqrt{n^2 + 8n} - n : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad \inf E = \mathbf{2} \qquad \sup E = \mathbf{4}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $E$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $E$  **NIE**

---


$$\mathbf{6.6.} \quad F = \left\{ \sqrt[3]{n^3 + 63n^2} - n : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad \inf F = \mathbf{3} \qquad \sup F = \mathbf{21}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $F$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $F$  **NIE**

---


$$\mathbf{6.7.} \quad G = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 2} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad \inf G = -\mathbf{1/3} \qquad \sup G = \mathbf{1/6}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $G$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $G$  **TAK**

---


$$\mathbf{6.8.} \quad H = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^3 + 6} : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad \inf H = -\mathbf{1/7} \qquad \sup H = \mathbf{1/14}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $H$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $H$  **TAK**

---


$$\mathbf{6.9.} \quad I = \{x^2 : x \in (-10, 3)\} \qquad \inf I = \mathbf{0} \qquad \sup I = \mathbf{100}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $I$  **TAK**    Czy kres górny należy do zbioru  $I$  **NIE**

---


$$\mathbf{6.10.} \quad J = \{x^3 : x \in (-10, 3)\} \qquad \inf J = -\mathbf{1000} \qquad \sup J = \mathbf{27}$$

Czy kres dolny należy do zbioru  $J$  **NIE**    Czy kres górny należy do zbioru  $J$  **NIE**

---