KOLOKWIUM nr 2, 16.11.2021, godz. 8:15–9:00

Zadanie **3.** **(10 punktów)**

Wskazać odpowiednią liczbę naturalną n i udowodnić dla niej nierówności

$$n^{2^{99}} < 2^n < n^{2^{100}} .$$

Rozwiązanie:

Sposób I

Przyjmijmy $n=2^k$. Wówczas podane nierówności przybierają postać

$$2^{k\cdot 2^{99}} < 2^{2^k} < 2^{k\cdot 2^{100}} ,$$

czyli

$$k\cdot 2^{99} < 2^k < k\cdot 2^{100} .$$

Zauważmy, że powyższe nierówności są prawdziwe dla $k=106$, gdyż wtedy

$$k\cdot 2^{99} = 106\cdot 2^{99} < 128\cdot 2^{99} = 2^7\cdot 2^{99} = 2^{106} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{106} = 2^6\cdot 2^{100} = 64\cdot 2^{100} < 106\cdot 2^{100} = k\cdot 2^{100} .$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=2^{106}$.

Sposób II

Przyjmijmy $n=k\cdot 2^{99}$. Wtedy podane nierówności przybierają postać

$$\left(k\cdot 2^{99}\right)^{2^{99}} < 2^{k\cdot 2^{99}} < \left(k\cdot 2^{99}\right)^{2^{100}} ,$$

czyli

$$\left(k\cdot 2^{99}\right)^{2^{99}} < \left(2^k\right)^{2^{99}} < \left(k^2\cdot 2^{198}\right)^{2^{99}} ,$$

co jest równoważne nierównościom

$$k\cdot 2^{99} < 2^k < k^2\cdot 2^{198} \qquad (\heartsuit) .$$

Zauważmy, że nierówności $(\heartsuit)$ są prawdziwe dla $k=106$, gdyż wówczas

$$k\cdot 2^{99} = 106\cdot 2^{99} < 128\cdot 2^{99} = 2^7\cdot 2^{99} = 2^{106} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{106} = 2^{12}\cdot 2^{94} = 64^2\cdot 2^{94} < 106^2\cdot 2^{94} = k^2\cdot 2^{94} < k^2\cdot 2^{198} .$$

Ale nierówności $(\heartsuit)$ są też prawdziwe dla $k=212$, gdyż wówczas

$$k\cdot 2^{99} = 212\cdot 2^{99} < 256\cdot 2^{99} = 2^8\cdot 2^{99} = 2^{107} < 2^{212} = 2^k$$

oraz

$$2^k = 2^{212} = 2^{14}\cdot 2^{198} = 128^2\cdot 2^{198} < 212^2\cdot 2^{198} = k^2\cdot 2^{198} .$$

Odpowiedź

Liczbą spełniającą podane nierówności jest $n=106\cdot 2^{99}$. A innym przykładem jest $n=212\cdot 2^{99}$.

Zadanie **4. (10 punktów)**

Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2}}{n^2+300}+\frac{\sqrt{n^2+2}}{n^2+303}+\frac{\sqrt{n^2+4}}{n^2+306}+\frac{\sqrt{n^2+6}}{n^2+309}+\frac{\sqrt{n^2+8}}{n^2+312}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{\sqrt{n^2+2k}}{n^2+300+3k}+\ldots+\frac{\sqrt{(n+A)^2-6}}{(n+B)^2-9}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-4}}{(n+B)^2-6}+\frac{\sqrt{(n+A)^2-2}}{(n+B)^2-3}+\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}\right)$$

dla tak dobranych liczb całkowitych dodatnich A i B, aby zadanie miało sens.

Rozwiązanie:

Ponieważ ostatni składnik sumy występującej w zadaniu może być zapisany jako

$$\frac{\sqrt{(n+A)^2}}{(n+B)^2}=\frac{\sqrt{n^2+2An+A^2}}{n^2+2Bn+B^2}=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot\frac{2An+A^2}{2}}}{n^2+300+2Bn+B^2-300}=$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+2\cdot\frac{2An+A^2}{2}}}{n^2+300+3\cdot\frac{2Bn+B^2-300}{3}},$$

cała suma przybiera postać

$$\sum_{k=0}^{N(n)}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{n^2+300+3k}\,, \tag{1}$$

gdzie

$$N(n)=\frac{2An+A^2}{2}=\frac{2Bn+B^2-300}{3}\,, \tag{2}$$

i w konsekwencji ma $N(n)+1$ składników. Aby zadanie miało sens, dla każdego n obie wartości $N(n)$ określone równaniami (2) muszą być równe, całkowite i nieujemne.

W celu znalezienia takich A i B, aby prawe równanie (2) było spełnione dla każdej liczby naturalnej n, dokonujemy następujących jego przekształceń:

$$3\cdot\left(2An+A^2\right)=2\cdot\left(2Bn+B^2-300\right)\,,$$

$$6An+3A^2=4Bn+2B^2-600\,. \tag{3}$$

Aby równość (3) zachodziła dla każdej liczby naturalnej n, odpowiednie współczynniki po obu jej stronach muszą być równe, co prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{cases}6A &= 4B\\ 3A^2 &= 2B^2-600\end{cases}$$

$$\begin{cases}3A &= 2B\\ 3A^2 &= 2B^2-600\end{cases} \tag{4}$$

Podstawienie do drugiego równania układu (4) $B=3A/2$ prowadzi kolejno do

$$3A^2=\frac{9A^2}{2}-600\,,$$

$$600=\frac{3A^2}{2}\,,$$

$$400=A^2\,,$$

$$A=20\,,$$

skąd $B=30$. Wstawiając te wartości do równości (2) otrzymujemy

$$N(n)=20n+200\,.$$

Wobec tego suma występująca pod znakiem granicy ma $20n+201$ składników.

Przystępując do rozwiązania głównej części zadania szacujemy sumę (1) obustronnie mnożąc liczbę składników przez ułamek, w którym wykonano niezależne szacowania na poziomie liczników i mianowników:

$$(20n+201)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+30)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{20n+200}\frac{\sqrt{n^2+2k}}{n+300+3k} \leqslant (20n+201)\cdot\frac{\sqrt{(n+20)^2}}{n^2+300}\,,$$

a następnie kolejno obliczamy granice oszacowań dolnego i górnego przy $n\to+\infty$.

Otrzymujemy

$$(20n+201)\cdot\frac{\sqrt{n^2}}{(n+30)^2}=\frac{(20n+201)\cdot n}{(n+30)^2}=\frac{20+\frac{201}{n}}{\left(1+\frac{30}{n}\right)^2}\to 20$$

oraz

$$(20n+201)\cdot\frac{\sqrt{(n+20)^2}}{n^2+300}=\frac{(20n+201)\cdot(n+20)}{n^2+300}=\frac{\left(20+\frac{201}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{20}{n}\right)}{1+\frac{300}{n^2}}\to 20\,.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wnioskujemy, że granica danego w zadaniu wyrażenia jest równa 20.

Odpowiedź: Zadanie ma sens dla $A=20$, $B=30$ i wówczas dana w zadaniu granica jest równa 20.