KOLOKWIUM nr 1, 25.10.2021, godz. 10:15–11:00

Zadanie **1. (10 punktów)**

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{49}\cdot n\leqslant 2^n+3\cdot 2^{53}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 48$.

Dla $n\leqslant 48$ zachodzą nierówności

$$2^{49}\cdot n\leqslant 2^{49}\cdot 48=2^{49}\cdot 3\cdot 2^4=3\cdot 2^{53}<2^n+3\cdot 2^{53}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 49$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=49$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{49}\cdot 49\,,$$

$$P=2^{49}+3\cdot 2^{53}=2^{49}+3\cdot 2^4\cdot 2^{49}=49\cdot 2^{49}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 49$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{49}\cdot n\leqslant 2^n+3\cdot 2^{53}\,. \tag{1}$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z nierówności (1) wynika nierówność

$$2^{49}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+3\cdot 2^{53}\,. \tag{2}$$

Wychodząc od lewej strony nierówności (2) i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 49$ otrzymujemy

$$L=2^{49}\cdot (n+1)=2^{49}\cdot n+2^{49}\leqslant 2^n+3\cdot 2^{53}+2^{49}\leqslant 2^n+3\cdot 2^{53}+2^n=2^{n+1}+3\cdot 2^{53}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie **2. (10 punktów)**

Liczba wymierna $q>1$ spełnia równość $5^q=q^5$. Udowodnić, że q jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

Niech $q>1$ będzie liczbą wymierną spełniającą równanie

$$5^q=q^5\,. \tag{3}$$

Zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego m/n o naturalnym liczniku i mianowniku. Zadanie sprowadza się do wykazania, że wówczas $n=1$.

Przekształcanie równania (3) prowadzi kolejno do:

$$5^{m/n}=\left(\frac{m}{n}\right)^5\,,$$

$$5^m=\left(\frac{m}{n}\right)^{5n}\,,$$

$$5^m\cdot n^{5n}=m^{5n}\,. \tag{4}$$

Udowodnimy, że z równania (4) oraz założenia $\mathrm{NWD}(m,n)=1$ wynika $n=1$.

Sposób I:

Dowód nie wprost.

Załóżmy, że liczba n jest większa od 1. Wówczas ma ona dzielnik pierwszy p. Ponieważ lewa strona równości (4) jest podzielna przez p, także prawa strona jest podzielna przez p, skąd wynika, że liczba m jest podzielna przez p. Ponieważ jednak z założenia liczby m i n są względnie pierwsze, taka sytuacja nie jest możliwa, co dowodzi, że $n=1$.

Sposób II:

Ponieważ lewa strona równości (4) jest podzielna przez 5, także prawa strona jest podzielna przez 5, skąd wynika, że liczba m jest podzielna przez 5. Ponieważ z założenia liczby m i n są względnie pierwsze, liczba n nie jest podzielna przez 5.

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że potęgi piątki występujące w rozkładach na czynniki pierwsze liczb po obu stronach równości (4) są równe. Otrzymujemy więc

$$m=5nk\,,$$

gdzie k jest wykładnikiem, z jakim piątka wchodzi do rozkładu liczby m na czynniki pierwsze. Stąd wynika, że liczba n jest dzielnikiem liczby m, a ponieważ jednocześnie liczba n jest względnie pierwsza z m, musi być $n=1$.

Uwaga: Istnieje liczba niewymierna $q\approx 1,7649219145$ spełniająca równanie $5^q=q^5$. Wobec tego wszelkie rozwiązania opierające się na wykazaniu, że $q=5$, są błędne.