

**KOŁOKWIUM POPRAWKOWE,
13.12.2021 (poniedziałek), godz. 10:15–11:45**

Zadanie 7. (10 punktów)

W każdym z zadań 7.1-7.10 w miejscu kropek podaj granicę ciągu.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

$$7.1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 60n} - n) = \mathbf{30}$$

$$7.2. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 60n^2} - n) = \mathbf{20}$$

$$7.3. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n^4 + 60n^3} - n) = \mathbf{15}$$

$$7.4. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{n^5 + 60n^4} - n) = \mathbf{12}$$

$$7.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^2} = \mathbf{1/2}$$

$$7.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{3}}{n^3} = \mathbf{1/6}$$

$$7.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{4}}{n^4} = \mathbf{1/24}$$

$$7.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{5}}{n^5} = \mathbf{1/120}$$

$$7.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \mathbf{4}$$

$$7.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}} = \mathbf{27/4}$$

Zadanie **8.** (20 punktów)

Niech

$$a_n = \frac{60}{(n+1)(n+2)}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z zadań **8.1-8.14** w miejscu kropek podaj sumę szeregu.

W zadaniach **8.1-8.8** za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt**.

W zadaniach **8.9-8.14** za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **2 punkty**.

$$8.1. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \mathbf{50}$$

$$8.2. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{10}$$

$$8.3. \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot a_n) = \mathbf{300}$$

$$8.4. \sum_{n=1}^{\infty} (a_2 \cdot a_n) = \mathbf{150}$$

$$8.5. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2) = \mathbf{100}$$

$$8.6. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+2}^2) = \mathbf{125}$$

$$8.7. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+1}^3) = \mathbf{1000}$$

$$8.8. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^3 - a_{n+2}^3) = \mathbf{1125}$$

$$8.9. \sum_{n=2}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{31}$$

$$8.10. \sum_{n=3}^{\infty} (2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}) = \mathbf{7}$$

$$8.11. \sum_{n=3}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \mathbf{26}$$

$$8.12. \sum_{n=4}^{\infty} (3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}) = \mathbf{8}$$

$$8.13. \sum_{n=3}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \mathbf{63}$$

$$8.14. \sum_{n=4}^{\infty} (4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}) = \mathbf{15}$$

Zadanie 9. (30 punktów)

W każdym z zadań **9.1-9.15** podaj w postaci uproszczonej (tzn. liczby wymierne muszą być zapisane w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego) kresy zbioru oraz napisz, czy kresy należą do zbioru (napisz **TAK** albo **NIE**, ewentualnie **T** albo **N**).

Kres może być liczbą rzeczywistą lub może być równy $-\infty$ albo $+\infty = \infty$.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **2 punkty**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie (i w postaci uproszczonej) oba kresy i poprawnie określisz przynależność jednego z nich do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za każde zadanie, w którym podasz bezbłędnie oba kresy (ale co najmniej jeden w postaci rażąco nieuproszczonej) i poprawnie określisz ich przynależność do zbioru, otrzymasz **1 punkt**.

Za pozostałe zadania nie otrzymasz punktów.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych (całkowitych dodatnich).

$$\mathbf{9.1.} \quad A = \left\{ \frac{1}{n^2 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf A = -1$$

$$\sup A = 1/10$$

Czy kres dolny należy do zbioru A **TAK** Czy kres górny należy do zbioru A **TAK**

$$\mathbf{9.2.} \quad B = \left\{ \frac{1}{n^3 - 26} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf B = -1/18$$

$$\sup B = 1$$

Czy kres dolny należy do zbioru B **TAK** Czy kres górny należy do zbioru B **TAK**

$$\mathbf{9.3.} \quad C = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 25n^2 \leq m^2 \leq 29n^2 \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf C = 5$$

$$\sup C = \sqrt{29}$$

Czy kres dolny należy do zbioru C **TAK** Czy kres górny należy do zbioru C **NIE**

$$\mathbf{9.4.} \quad D = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 23n^3 \leq m^3 \leq 27n^3 \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf D = \sqrt[3]{23}$$

$$\sup D = 3$$

Czy kres dolny należy do zbioru D **NIE** Czy kres górny należy do zbioru D **TAK**

$$\mathbf{9.5.} \quad E = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 77^n \leq 27^m \leq 81^n \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf E = \log_{27} 77$$

$$\sup E = 4/3$$

Czy kres dolny należy do zbioru E **NIE** Czy kres górny należy do zbioru E **TAK**

$$\mathbf{9.6.} \quad F = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \wedge 64^n \leq 32^m \leq 77^n \right\} \quad \text{Ocena}$$

$$\inf F = 6/5$$

$$\sup F = \log_{32} 77$$

Czy kres dolny należy do zbioru F **TAK** Czy kres górny należy do zbioru F **NIE**

9.7. $G = \left\{ \sqrt{n^2 + 15n} - n : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf G = \mathbf{3}$	$\sup G = \mathbf{15/2}$
Czy kres dolny należy do zbioru G TAK	Czy kres górny należy do zbioru G NIE
9.8. $H = \left\{ \sqrt[3]{n^3 + 26n^2} - n : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf H = \mathbf{2}$	$\sup H = \mathbf{26/3}$
Czy kres dolny należy do zbioru H TAK	Czy kres górny należy do zbioru H NIE
9.9. $I = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^4 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf I = \mathbf{-1/2}$	$\sup I = \mathbf{1/17}$
Czy kres dolny należy do zbioru I TAK	Czy kres górny należy do zbioru I TAK
9.10. $J = \left\{ \frac{(-1)^n}{4^n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf J = \mathbf{-1/5}$	$\sup J = \mathbf{1/17}$
Czy kres dolny należy do zbioru J TAK	Czy kres górny należy do zbioru J TAK
9.11. $K = \left\{ x^5 : x \in (-2, 1) \right\}$	Ocena
$\inf K = \mathbf{-32}$	$\sup K = \mathbf{1}$
Czy kres dolny należy do zbioru K NIE	Czy kres górny należy do zbioru K NIE
9.12. $L = \left\{ x^6 : x \in (-2, 1) \right\}$	Ocena
$\inf L = \mathbf{0}$	$\sup L = \mathbf{64}$
Czy kres dolny należy do zbioru L TAK	Czy kres górny należy do zbioru L NIE
9.13. $M = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 77} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf M = \mathbf{-1/7}$	$\sup M = \mathbf{1/2}$
Czy kres dolny należy do zbioru M TAK	Czy kres górny należy do zbioru M TAK
9.14. $N = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 97} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf N = \mathbf{-1/2}$	$\sup N = \mathbf{1}$
Czy kres dolny należy do zbioru N TAK	Czy kres górny należy do zbioru N TAK
9.15. $P = \left\{ \frac{1}{n^2 - 20n + 117} : n \in \mathbb{N} \right\}$	Ocena
$\inf P = \mathbf{0}$	$\sup P = \mathbf{1/17}$
Czy kres dolny należy do zbioru P NIE	Czy kres górny należy do zbioru P TAK