Egzamin, 15.02.2022, godz. 10:40-12:00

Zadanie 1 (wersja 0)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{41} \cdot n \leqslant 2^n + 5 \cdot 2^{44}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n \leqslant 40$.

Dla $n \leqslant 40$ zachodzą nierówności

$$2^{41} \cdot n \leqslant 2^{41} \cdot 40 = 2^{44} \cdot 5 < 2^n + 5 \cdot 2^{44}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n \geqslant 41$.
Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 41$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L = 2^{41} \cdot 41\,,$$

$$P = 2^{41} + 5 \cdot 2^{44} = 2^{41} + 5 \cdot 4 \cdot 2^{41} = 41 \cdot 2^{41}\,,$$

skąd $L = P$.

2° Niech $n \geqslant 41$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{41} \cdot n \leqslant 2^n + 5 \cdot 2^{44}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{41} \cdot (n+1) \leqslant 2^{n+1} + 5 \cdot 2^{44}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n \geqslant 41$ otrzymujemy

$$L = 2^{41} \cdot (n+1) = 2^{41} \cdot n + 2^{41} \leqslant 2^n + 5 \cdot 2^{44} + 2^{41} \leqslant 2^n + 5 \cdot 2^{44} + 2^n = 2^{n+1} + 5 \cdot 2^{44} = P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 1 (wersja 1)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{49}\cdot n\leqslant 2^n+3\cdot 2^{53}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 48$.

Dla $n\leqslant 48$ zachodzą nierówności

$$2^{49}\cdot n\leqslant 2^{49}\cdot 48=2^{53}\cdot 3<2^n+3\cdot 2^{53}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 49$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=49$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{49}\cdot 49\,,$$

$$P=2^{49}+3\cdot 2^{53}=2^{49}+3\cdot 4\cdot 2^{49}=49\cdot 2^{49}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 49$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{49}\cdot n\leqslant 2^n+3\cdot 2^{53}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{49}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+3\cdot 2^{53}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 49$ otrzymujemy

$$L=2^{49}\cdot (n+1)=2^{49}\cdot n+2^{49}\leqslant 2^n+3\cdot 2^{53}+2^{49}\leqslant 2^n+3\cdot 2^{53}+2^n=2^{n+1}+3\cdot 2^{53}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 1 (wersja 2)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{57}\cdot n\leqslant 2^n+7\cdot 2^{60}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 56$.

Dla $n\leqslant 56$ zachodzą nierówności

$$2^{57}\cdot n\leqslant 2^{57}\cdot 56=2^{60}\cdot 7<2^n+7\cdot 2^{60}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 57$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=57$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{57}\cdot 57\,,$$

$$P=2^{57}+7\cdot 2^{60}=2^{57}+7\cdot 4\cdot 2^{57}=57\cdot 2^{57}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 57$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{57}\cdot n\leqslant 2^n+7\cdot 2^{60}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{57}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+7\cdot 2^{60}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 57$ otrzymujemy

$$L=2^{57}\cdot (n+1)=2^{57}\cdot n+2^{57}\leqslant 2^n+7\cdot 2^{60}+2^{57}\leqslant 2^n+7\cdot 2^{60}+2^n=2^{n+1}+7\cdot 2^{60}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 1 (wersja 3)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{73}\cdot n\leqslant 2^n+9\cdot 2^{76}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 72$.

Dla $n\leqslant 72$ zachodzą nierówności

$$2^{73}\cdot n\leqslant 2^{73}\cdot 72=2^{76}\cdot 9<2^n+9\cdot 2^{76}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 73$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=73$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{73}\cdot 73\,,$$

$$P=2^{73}+9\cdot 2^{76}=2^{73}+9\cdot 4\cdot 2^{73}=73\cdot 2^{73}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 73$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{73}\cdot n\leqslant 2^n+9\cdot 2^{76}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{73}\cdot(n+1)\leqslant 2^{n+1}+9\cdot 2^{76}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 73$ otrzymujemy

$$L=2^{73}\cdot(n+1)=2^{73}\cdot n+2^{73}\leqslant 2^n+9\cdot 2^{76}+2^{73}\leqslant 2^n+9\cdot 2^{76}+2^n=2^{n+1}+9\cdot 2^{76}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 1 (wersja 4)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{81}\cdot n\leqslant 2^n+5\cdot 2^{85}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 80$.

Dla $n\leqslant 80$ zachodzą nierówności

$$2^{81}\cdot n\leqslant 2^{81}\cdot 80=2^{85}\cdot 5<2^n+5\cdot 2^{85}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 81$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=81$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{81}\cdot 81\,,$$

$$P=2^{81}+5\cdot 2^{85}=2^{81}+5\cdot 4\cdot 2^{81}=81\cdot 2^{81}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 81$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{81}\cdot n\leqslant 2^n+5\cdot 2^{85}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{81}\cdot(n+1)\leqslant 2^{n+1}+5\cdot 2^{85}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 81$ otrzymujemy

$$L=2^{81}\cdot(n+1)=2^{81}\cdot n+2^{81}\leqslant 2^n+5\cdot 2^{85}+2^{81}\leqslant 2^n+5\cdot 2^{85}+2^n=2^{n+1}+5\cdot 2^{85}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 1 (wersja 5)

Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$2^{89}\cdot n\leqslant 2^{n}+11\cdot 2^{92}\,.$$

Rozwiązanie:

Dowód nierówności podzielimy na dwa przypadki.

Przypadek pierwszy: $n\leqslant 88$.

Dla $n\leqslant 88$ zachodzą nierówności

$$2^{89}\cdot n\leqslant 2^{89}\cdot 88=2^{92}\cdot 11<2^{n}+11\cdot 2^{92}\,,$$

skąd wynika prawdziwość nierówności danej w zadaniu.

Przypadek drugi: $n\geqslant 89$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=89$ porównujemy lewą i prawą stronę nierówności danej w treści zadania:

$$L=2^{89}\cdot 89\,,$$

$$P=2^{89}+11\cdot 2^{92}=2^{89}+11\cdot 4\cdot 2^{89}=89\cdot 2^{89}\,,$$

skąd $L=P$.

2° Niech $n\geqslant 89$ będzie taką liczbą naturalną, że

$$2^{89}\cdot n\leqslant 2^{n}+11\cdot 2^{92}\,.$$

W celu przeprowadzenia zasadniczej części dowodu indukcyjnego chcemy wykazać, że z powyższej nierówności wynika nierówność

$$2^{89}\cdot (n+1)\leqslant 2^{n+1}+11\cdot 2^{92}\,.$$

Wychodząc od lewej strony powyższej nierówności i korzystając z założenia indukcyjnego oraz z nierówności $n\geqslant 89$ otrzymujemy

$$L=2^{89}\cdot (n+1)=2^{89}\cdot n+2^{89}\leqslant 2^{n}+11\cdot 2^{92}+2^{89}\leqslant 2^{n}+11\cdot 2^{92}+2^{n}=2^{n+1}+11\cdot 2^{92}=P\,,$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 2 (wersja 0)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+10)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $20n+100$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{20n+100}{(n+10)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{20n+100}{(n+10)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(20n+100)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(20n+100)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{20n+100}{(n+10)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(20n+100)}{(n+10)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(20n+100)=\frac{(20n+100)\cdot(20n+101)}{2}=$$

$$=(10n+50)\cdot(20n+101)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(10n+50)\cdot(20n+101)}{n^2}\to 200$$

przy $n \to \infty$. Podobnie

$$a_n = \frac{(10n+50)\cdot(20n+101)}{(n+10)^2} \to 200$$

przy $n \to \infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 200$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 200\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 200\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 200.

Zadanie 2 (wersja 1)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+20)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $40n+400$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{40n+400}{(n+20)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{40n+400}{(n+20)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(40n+400)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(40n+400)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{40n+400}{(n+20)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(40n+400)}{(n+20)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(40n+400)=\frac{(40n+400)\cdot(40n+401)}{2}=$$

$$=(20n+200)\cdot(40n+401)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(20n+200)\cdot(40n+401)}{n^2}\to 800$$

przy $n\to\infty$. Podobnie

$$a_n=\frac{(20n+200)\cdot(40n+401)}{(n+20)^2}\to 800$$

przy $n\to\infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n=800$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n=800\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n=800\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 800.

Zadanie 2 (wersja 2)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+30)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $60n+900$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{60n+900}{(n+30)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{60n+900}{(n+30)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(60n+900)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(60n+900)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{60n+900}{(n+30)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(60n+900)}{(n+30)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(60n+900)=\frac{(60n+900)\cdot(60n+901)}{2}=$$

$$=(30n+450)\cdot(60n+901)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(30n+450)\cdot(60n+901)}{n^2}\to 1800$$

przy $n\to\infty$. Podobnie

$$a_n=\frac{(30n+450)\cdot(60n+901)}{(n+30)^2}\to 1800$$

przy $n\to\infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n=1800$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1800\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n=1800\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 1800.

Zadanie 2 (wersja 3)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{\qquad}{(n+40)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $80n+1600$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{80n+1600}{(n+40)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{80n+1600}{(n+40)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(80n+1600)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(80n+1600)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{80n+1600}{(n+40)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(80n+1600)}{(n+40)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(80n+1600)=\frac{(80n+1600)\cdot(80n+1601)}{2}=$$

$$=(40n+800)\cdot(80n+1601)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(40n+800)\cdot(80n+1601)}{n^2}\to 3200$$

przy $n\to\infty$. Podobnie

$$a_n=\frac{(40n+800)\cdot(80n+1601)}{(n+40)^2}\to 3200$$

przy $n\to\infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n\,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n=3200$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n=3200\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n=3200\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 3200.

Zadanie 2 (wersja 4)

Obliczyć granicę ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{}{(n+50)^2}\right).$$

Uwaga: W ostatnim składniku sumy brakuje licznika. Jego uzupełnienie jest częścią zadania.

Rozwiązanie:

Patrząc na mianowniki widzimy, że suma składa się z $100n+2500$ składników, wobec czego zadanie polega na obliczeniu granicy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{100n+2500}{(n+50)^2}\right).$$

Oznaczmy sumę występującą pod znakiem granicy przez b_n. Zamierzamy skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, co wymaga oszacowania b_n od góry i od dołu przez ciągi zbieżne do wspólnej granicy.

Zauważmy, że składniki tej sumy bardzo się różnią. Należy zatem oczekiwać, że oszacowanie sumy poprzez wspólne oszacowanie składników (i przemnożenie tego oszacowania przez liczbę składników), będzie prowadzić do oszacowań mających różne granice, co uniemożliwi skorzystanie z twierdzenia o trzech ciągach.

Zauważmy też, że za tak znaczną różnicę wielkości składników odpowiadają liczniki, podczas gdy mianowniki mają zbliżoną wielkość. Liczniki tworzą jednak postęp arytmetyczny, a więc ich sumę bez problemu możemy obliczyć. W konsekwencji będziemy szacować mianowniki przez wspólną wielkość, nie zmieniając liczników, a następnie dodamy składniki powstałe w wyniku tego oszacowania.

I tak, szacowanie od góry (czyli szacowanie mianowników od dołu) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{100n+2500}{(n+50)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(100n+2500)}{n^2+0}=\frac{1+2+3+4+\ldots+(100n+2500)}{n^2}=c_n$$

Z kolei szacowanie od dołu (czyli szacowanie mianowników od góry) prowadzi do

$$b_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\frac{4}{n^2+4}+\ldots+\frac{100n+2500}{(n+50)^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1+2+3+4+\ldots+(100n+2500)}{(n+50)^2}=a_n\,.$$

Ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego otrzymujemy

$$1+2+3+4+\ldots+(100n+2500)=\frac{(100n+2500)\cdot(100n+2501)}{2}=$$
$$=(50n+1250)\cdot(100n+2501)\,.$$

Wobec tego

$$c_n=\frac{(50n+1250)\cdot(100n+2501)}{n^2}\to 5000$$

przy $n \to \infty$. Podobnie

$$a_n = \frac{(50n+1250)\cdot(100n+2501)}{(n+50)^2} \to 5000$$

przy $n \to \infty$.

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \,,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 5000$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 5000\,,$$

na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 5000\,.$$

Odpowiedź: Granica podana w treści zadania ma wartość 5000.

Zadanie 3 (wersja 0)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa

$$\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 3 \quad \text{czy} \quad \frac{1}{13} \ ?$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[3, 5]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (3, 5)$, że

$$\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 3 = (5-3) \cdot f'(c) = 2 \cdot f'(c) \, .$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \, ,$$

z nierówności $3 < c < 5$ otrzymujemy

$$\frac{1}{13} = \frac{2}{26} = \frac{2}{5^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 3 = \frac{2}{c^2+1} \quad < \quad \frac{2}{3^2+1} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \, .$$

Odpowiedź: Liczba $\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 3$ jest większa od liczby $1/13$.

Zadanie 3 (wersja 1)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa

$$\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5 \quad \text{czy} \quad \frac{1}{13}\ ?$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\operatorname{arctg} x$ na przedziale $[5,7]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(5,7)$, że

$$\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5=(7-5)\cdot f'(c)=2\cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $5<c<7$ otrzymujemy

$$\frac{1}{25}=\frac{2}{50}=\frac{2}{7^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5=\frac{2}{c^2+1} \quad < \quad \frac{2}{5^2+1}=\frac{2}{26}=\frac{1}{13}\,.$$

Odpowiedź: Liczba $\operatorname{arctg} 7-\operatorname{arctg} 5$ jest mniejsza od liczby $1/13$.

Zadanie 3 (wersja 2)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa

$$\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 7 \quad \text{czy} \quad \frac{1}{41} \text{ ?}$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x)=\operatorname{arctg} x$ na przedziale $[7,9]$ wynika istnienie takiej liczby $c\in(7,9)$, że

$$\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 7 = (9-7)\cdot f'(c) = 2\cdot f'(c)\,.$$

Ponieważ

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\,,$$

z nierówności $7<c<9$ otrzymujemy

$$\frac{1}{41}=\frac{2}{82}=\frac{2}{9^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 7 = \frac{2}{c^2+1} \quad < \quad \frac{2}{7^2+1}=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}\,.$$

Odpowiedź: Liczba $\operatorname{arctg} 9 - \operatorname{arctg} 7$ jest większa od liczby $1/41$.

Zadanie 3 (wersja 3)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa

$$\operatorname{arctg} 11 - \operatorname{arctg} 9 \quad \text{czy} \quad \frac{1}{41} \ ?$$

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ na przedziale $[9, 11]$ wynika istnienie takiej liczby $c \in (9, 11)$, że

$$\operatorname{arctg} 11 - \operatorname{arctg} 9 = (11-9) \cdot f'(c) = 2 \cdot f'(c) \, .$$

Ponieważ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \, ,$$

z nierówności $9 < c < 11$ otrzymujemy

$$\frac{1}{61} = \frac{2}{122} = \frac{2}{11^2+1} \quad < \quad \operatorname{arctg} 11 - \operatorname{arctg} 9 = \frac{2}{c^2+1} \quad < \quad \frac{2}{9^2+1} = \frac{2}{82} = \frac{1}{41} \, .$$

Odpowiedź: Liczba $\operatorname{arctg} 11 - \operatorname{arctg} 9$ jest mniejsza od liczby $1/41$.

Zadanie 4 (wersja 0)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{10}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{10}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{300}\ ?$$

Wskazówka: $f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}-\frac{1}{6\cdot x^{5/6}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}+\frac{5}{36\cdot x^{11/6}}=\frac{125-144\cdot x^{1/30}}{900\cdot x^{11/6}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/30$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{30}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{30}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\dfrac{1}{10}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{10}\right)<\frac{1}{300}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{10}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{10}} \qquad < \qquad \frac{1}{300}\,.$$

Zadanie 4 (wersja 1)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{11}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{11}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{330}\,?$$

Wskazówka: $f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}-\frac{1}{6\cdot x^{5/6}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}+\frac{5}{36\cdot x^{11/6}}=\frac{125-144\cdot x^{1/30}}{900\cdot x^{11/6}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/30$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{30}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{30}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{11}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{11}\right)<\frac{1}{330}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{11}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{11}} \qquad < \qquad \frac{1}{330}\,.$$

Zadanie 4 (wersja 2)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{12}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{12}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{360}\ ?$$

Wskazówka: $f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}-\frac{1}{6\cdot x^{5/6}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}+\frac{5}{36\cdot x^{11/6}}=\frac{125-144\cdot x^{1/30}}{900\cdot x^{11/6}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/30$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{30}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{30}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\dfrac{1}{12}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{12}\right)<\frac{1}{360}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{12}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{12}} \qquad < \qquad \frac{1}{360}\,.$$

Zadanie 4 (wersja 3)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{13}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{13}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{390}\ ?$$

Wskazówka: $f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}-\frac{1}{6\cdot x^{5/6}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}+\frac{5}{36\cdot x^{11/6}}=\frac{125-144\cdot x^{1/30}}{900\cdot x^{11/6}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/30$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{30}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{30}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{13}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{13}\right)<\frac{1}{390}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{13}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{13}} \qquad < \qquad \frac{1}{390}\,.$$

Zadanie 4 (wersja 4)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{20}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{20}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{600}\ ?$$

Wskazówka: $f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}-\frac{1}{6\cdot x^{5/6}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}+\frac{5}{36\cdot x^{11/6}}=\frac{125-144\cdot x^{1/30}}{900\cdot x^{11/6}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/30$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{30}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{30}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\dfrac{1}{20}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{20}\right)<\frac{1}{600}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{20}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{20}} \qquad < \qquad \frac{1}{600}\,.$$

Zadanie 4 (wersja 5)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{21}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{21}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{630}\,?$$

Wskazówka: $f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}-\frac{1}{6\cdot x^{5/6}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}+\frac{5}{36\cdot x^{11/6}}=\frac{125-144\cdot x^{1/30}}{900\cdot x^{11/6}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/30$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{30}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{30}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\dfrac{1}{21}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{21}\right)<\frac{1}{630}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{21}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{21}} \qquad < \qquad \frac{1}{630}\,.$$

Zadanie 4 (wersja 6)

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{22}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{22}} \qquad \text{czy} \qquad \frac{1}{660}\,?$$

Wskazówka: $f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sqrt[5]{x}-\sqrt[6]{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{1}{5\cdot x^{4/5}}-\frac{1}{6\cdot x^{5/6}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{4}{25\cdot x^{9/5}}+\frac{5}{36\cdot x^{11/6}}=\frac{125-144\cdot x^{1/30}}{900\cdot x^{11/6}}<0$$

dla $x>1$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $(1,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>1$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(1,0)$. Ponieważ $f'(1)=1/30$, dla $x>1$ zachodzi nierówność

$$f(x)<f(1)+\frac{1}{30}\cdot(x-1)=\frac{x-1}{30}$$

i w konsekwencji przyjmując $x=1+\frac{1}{22}$ otrzymujemy

$$f\left(1+\frac{1}{22}\right)<\frac{1}{660}\,.$$

Odpowiedź:

$$\sqrt[5]{1+\frac{1}{22}}-\sqrt[6]{1+\frac{1}{22}} \qquad < \qquad \frac{1}{660}\,.$$

Zadanie 5 (wersja 0)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2011} x \cdot \cos^{2013} x > \frac{1}{2^{2012}} .$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^{2011} x \cdot \cos^{2013} x .$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x) = 2011 \cdot \sin^{2010} x \cdot \cos^{2014} x - 2013 \cdot \sin^{2012} x \cdot \cos^{2012} x =$$
$$= \left(2011 \cdot \cos^2 x - 2013 \cdot \sin^2 x\right) \cdot \sin^{2010} x \cdot \cos^{2012} x .$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{2012}}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2011 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} - 2013 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^{2010} \frac{\pi}{4} \cdot \cos^{2012} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2^{2011}} \neq 0 ,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/4$ wartość $1/2^{2012}$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/4) \neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/4$ także wartość większą od $1/2^{2012}$.

Zadanie 5 (wersja 1)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność
$$\sin^{2013}x\cdot\cos^{2015}x>\frac{1}{2^{2014}}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem
$$f(x)=\sin^{2013}x\cdot\cos^{2015}x\,.$$
Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem
$$f'(x)=2013\cdot\sin^{2012}x\cdot\cos^{2016}x-2015\cdot\sin^{2014}x\cdot\cos^{2014}x=$$
$$=\left(2013\cdot\cos^2x-2015\cdot\sin^2x\right)\cdot\sin^{2012}x\cdot\cos^{2014}x\,.$$
Ponieważ
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2^{2014}}$$
oraz
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(2013\cdot\cos^2\frac{\pi}{4}-2015\cdot\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin^{2012}\frac{\pi}{4}\cdot\cos^{2014}\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2^{2013}}\neq0\,,$$
funkcja f osiąga w punkcie $\pi/4$ wartość $1/2^{2014}$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/4)\neq0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/4$ także wartość większą od $1/2^{2014}$.

Zadanie 5 (wersja 2)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2015} x \cdot \cos^{2017} x > \frac{1}{2^{2016}} .$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^{2015} x \cdot \cos^{2017} x .$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x) = 2015 \cdot \sin^{2014} x \cdot \cos^{2018} x - 2017 \cdot \sin^{2016} x \cdot \cos^{2016} x =$$
$$= \left(2015 \cdot \cos^2 x - 2017 \cdot \sin^2 x\right) \cdot \sin^{2014} x \cdot \cos^{2016} x .$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{2016}}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2015 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} - 2017 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^{2014} \frac{\pi}{4} \cdot \cos^{2016} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2^{2015}} \neq 0 ,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/4$ wartość $1/2^{2016}$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/4) \neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/4$ także wartość większą od $1/2^{2016}$.

Zadanie 5 (wersja 3)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2017} x \cdot \cos^{2019} x > \frac{1}{2^{2018}} .$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^{2017} x \cdot \cos^{2019} x .$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x) = 2017 \cdot \sin^{2016} x \cdot \cos^{2020} x - 2019 \cdot \sin^{2018} x \cdot \cos^{2018} x =$$
$$= \left(2017 \cdot \cos^2 x - 2019 \cdot \sin^2 x\right) \cdot \sin^{2016} x \cdot \cos^{2018} x .$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{2018}}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2017 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} - 2019 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^{2016} \frac{\pi}{4} \cdot \cos^{2018} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2^{2017}} \neq 0 ,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/4$ wartość $1/2^{2018}$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/4) \neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/4$ także wartość większą od $1/2^{2018}$.

Zadanie 5 (wersja 4)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2019}x\cdot\cos^{2021}x>\frac{1}{2^{2020}}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sin^{2019}x\cdot\cos^{2021}x\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2019\cdot\sin^{2018}x\cdot\cos^{2022}x-2021\cdot\sin^{2020}x\cdot\cos^{2020}x=$$
$$=\left(2019\cdot\cos^2x-2021\cdot\sin^2x\right)\cdot\sin^{2018}x\cdot\cos^{2020}x\,.$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2^{2020}}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(2019\cdot\cos^2\frac{\pi}{4}-2021\cdot\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin^{2018}\frac{\pi}{4}\cdot\cos^{2020}\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2^{2019}}\neq0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/4$ wartość $1/2^{2020}$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/4)\neq0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/4$ także wartość większą od $1/2^{2020}$.

Zadanie 5 (wersja 5)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2021} x \cdot \cos^{2023} x > \frac{1}{2^{2022}} .$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^{2021} x \cdot \cos^{2023} x .$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x) = 2021 \cdot \sin^{2020} x \cdot \cos^{2024} x - 2023 \cdot \sin^{2022} x \cdot \cos^{2022} x =$$
$$= \left(2021 \cdot \cos^2 x - 2023 \cdot \sin^2 x\right) \cdot \sin^{2020} x \cdot \cos^{2022} x .$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{2022}}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2021 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} - 2023 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^{2020} \frac{\pi}{4} \cdot \cos^{2022} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2^{2021}} \neq 0 ,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/4$ wartość $1/2^{2022}$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/4) \neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/4$ także wartość większą od $1/2^{2022}$.

Zadanie 5 (wersja 6)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2023}x\cdot\cos^{2025}x>\frac{1}{2^{2024}}\,.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x)=\sin^{2023}x\cdot\cos^{2025}x\,.$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x)=2023\cdot\sin^{2022}x\cdot\cos^{2026}x-2025\cdot\sin^{2024}x\cdot\cos^{2024}x=$$
$$=\left(2023\cdot\cos^2x-2025\cdot\sin^2x\right)\cdot\sin^{2022}x\cdot\cos^{2024}x\,.$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2^{2024}}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(2023\cdot\cos^2\frac{\pi}{4}-2025\cdot\sin^2\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin^{2022}\frac{\pi}{4}\cdot\cos^{2024}\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2^{2023}}\neq 0\,,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/4$ wartość $1/2^{2024}$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/4)\neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/4$ także wartość większą od $1/2^{2024}$.

Zadanie 5 (wersja 7)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2025} x \cdot \cos^{2027} x > \frac{1}{2^{2026}} .$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^{2025} x \cdot \cos^{2027} x .$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x) = 2025 \cdot \sin^{2024} x \cdot \cos^{2028} x - 2027 \cdot \sin^{2026} x \cdot \cos^{2026} x =$$
$$= \left(2025 \cdot \cos^2 x - 2027 \cdot \sin^2 x\right) \cdot \sin^{2024} x \cdot \cos^{2026} x .$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{2026}}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2025 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} - 2027 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^{2024} \frac{\pi}{4} \cdot \cos^{2026} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2^{2025}} \neq 0 ,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/4$ wartość $1/2^{2026}$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/4) \neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/4$ także wartość większą od $1/2^{2026}$.

Zadanie 5 (wersja 8)

Udowodnić istnienie liczby rzeczywistej x spełniającej nierówność

$$\sin^{2027} x \cdot \cos^{2029} x > \frac{1}{2^{2028}} .$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin^{2027} x \cdot \cos^{2029} x .$$

Wówczas jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x) = 2027 \cdot \sin^{2026} x \cdot \cos^{2030} x - 2029 \cdot \sin^{2028} x \cdot \cos^{2028} x =$$
$$= \left(2027 \cdot \cos^2 x - 2029 \cdot \sin^2 x\right) \cdot \sin^{2026} x \cdot \cos^{2028} x .$$

Ponieważ

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^{2028}}$$

oraz

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(2027 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{4} - 2029 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin^{2026} \frac{\pi}{4} \cdot \cos^{2028} \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2^{2027}} \neq 0 ,$$

funkcja f osiąga w punkcie $\pi/4$ wartość $1/2^{2028}$, która nie jest ekstremum lokalnym, gdyż $f'(\pi/4) \neq 0$. W szczególności nie jest to maksimum lokalne, co oznacza, że funkcja f musi osiągać w pobliżu $\pi/4$ także wartość większą od $1/2^{2028}$.